Quels changements dans les mathématiques appliquées ? Mécanique des fluides, dynamique des populations

Laurent Desvillettes

CMLA, ENS Cachan & IUF

Changements communs à l'ensemble du monde académique: Email, internet:

Arrivée à partir du milieu des années 80 et du début des années 90:

Impact de l'Email/Internet

1. Echange “instantané” d'idées et de fichiers avec des collègues (en particulier étrangers),
2. Traitement éditorial en ligne (auteurs, referees, éditeurs) à travers des logiciels spécifiques (identiques pour Springer, Elsevier).
3. Mise en ligne sur les sites personnels des papiers récents (indispensable pour les études bibliographiques dans le cadre des contrats industriels), parfois (plus rarement) commentés et mis en perspective historique [très utile car souvent moins formaté que les textes “papier”, et susceptible d'être mis à jour!]
4. Possibilité d'abonnement aux versions électroniques des revues (à travers des bouquets pluridisciplinaires: important pour les mathématiques appliquées),
5. Apparition de “blogs disciplinaires” (cf. celui de T.Tao).

Changements spécifiques des maths/info/physique théorique: TeX

Langage développé dans les années 80 (à partir de 1978) pour l'édition des formules mathématiques. Initialement en concurrence avec des extensions de Word (encore utilisées dans les sciences expérimentales).

Exemple:

Code source

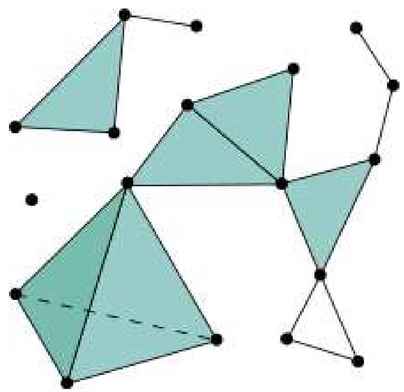
```
f(t, x_1, x_2, \theta) = \sum_{n = 0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}..

\int_{-\pi}^{\pi}\int_{t_1 = 0}^t..\int_{t_n = t_{n - 1}}^te^{-t}
```

Résultat

$$f(t, x_1, x_2, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} .. \int_{-\pi}^{\pi} \int_{t_1=0}^{t} .. \int_{t_n=t_{n-1}}^{t} e^{-t}$$

Extensions de TeX

1. Latex (macros),
2. Transparents (prosper),
3. Schémas, images.



$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, "q'"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "0_{XQ}"] \arrow[drr, "0_{XQ'}"'] & Q \arrow[dr, dotted, "u"] & \\ & & Q' \end{tikzcd}$$

Impact de TeX

1. Multiplication des versions “brouillon” (jusquà 100 !!), partagées entre auteurs, avec des effets variés (attente de résultats supplémentaires, publication de travaux à moitié avortés, etc.)
2. Disparition progressive de la “frappe” externe,
3. Formattage des papiers, mais accès plus facile à la frappe des langues à alphabet non romain,
4. Perte progressive de la tradition de l’exposé au tableau noir [en mathématiques appliquées],
5. Difficulté de la traque des erreurs (autorité de la chose publiée).

Changements spécifiques des math. applis/phys. numérique/info; environnement de programmation

1. Dans les années 80, disparition des cartes perforées, arrivée des ordinateurs individuels.

2. Au début des années 90, amélioration du confort de programmation: couleur, fenêtres, plusieurs écrans accessibles.

3. Fin des années 90-début des années 2000: diffusion des ordinateurs portables et du wifi, possibilité de programmer/exécuter des programmes à distance confortablement.

Changements spécifiques des math. pures et appli.: logiciels de calcul formel

Maple (1985) Mathematica (1988)

Permet de calculer "formellement" (recherche de solutions explicites d'équations), et d'illustrer.

```
> diff(3*t^2+2*exp(t^3)+5*t+1,t);
```

$$6\,t+6\,t^2\,\mathbf{e}^{(t^3)}+5$$

```
>
```

Modélisation, analyse mathématique, analyse numérique, calcul scientifique

Modélisation: Transformation (simplification) du monde réel en un problème mathématique (collaboration avec des physiciens, chimistes, biologistes, mécaniciens, économistes, sociologues, etc.),

Analyse mathématique: Recherche des propriétés qualitatives des solutions des problèmes mathématiques issus de la modélisation,

Analyse numérique: Discrétisation des équations (mise sous forme d'un problème traitable par ordinateur: nombre fini de variables a virgule flottante; nombre fini d'opérations à effectuer), étude de la qualité de la discrétisation,

Calcul scientifique: Programmation effective de la discrétisation, utilisation des ressources informatiques (parallèlisation).

Calcul scientifique: “Grosses” simulations

- Mécanique des fluides [et combustion] (Météo-Climatologie; Nucléaire civil; Energies fossiles; Moteurs; Génie des procédés),

- Neutronique, Photonique (Nucléaire civil et militaire; Astrophysique),

- Mécanique des solides (Génie civil; Constructions automobiles et aéronautiques),

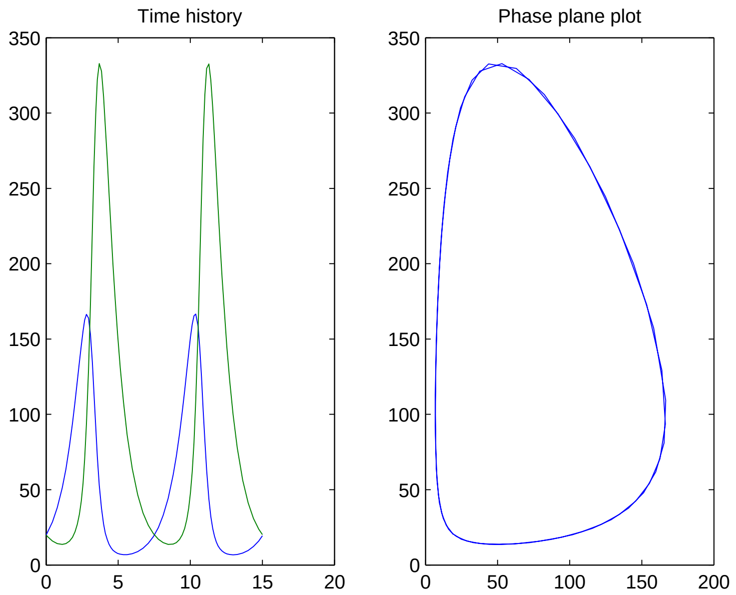
Utilisation de codes commerciaux [Fluent (ANSYS)], de codes “freeware” et de codes “maison” (semi-free...).

Mathématiques appliquées: simulations "quotidiennes"

- Tests d'hypothèses pour l'établissement des théorèmes,
- Tests de la performance des approximations numériques,
- Tests de la qualité des modèles,
- Tests d'apparition de propriétés collectives.

Arrivée de matlab (1984): langage de programmation évolué (plus proche du langage "naturel" des mathématiciens que les langages de programmation "classiques" (c, fortran90), et permettant la visualisation.

```
 function yp = lotka(t,y)
yp = diag([1 - .01*y(2), -1 + .02*y(1)])*y;
t0 = 0;
tfinal = 15;
y0 = [20 20]';
tfinal = tfinal*(1+eps);
[t,y] = ode23('lotka',[t0 tfinal],y0);
 subplot(1,2,1)
plot(t,y)
title('Time history')
 subplot(1,2,2)
plot(y(:,1),y(:,2))
title('Phase plane plot')
```



Exemple de présentation sur un problème de dynamique des populations

Invasion and the evolution of speed in toads Nature 439, 803 (16 February 2006)

Benjamin L. Phillips, Gregory P. Brown, Jonathan K. Webb, Richard Shine

Cane toads (Bufo marinus) are large anurans (weighing up to 2 kg) that were introduced to Australia 70 years ago to control insect pests in sugar-cane fields. But the result has been disastrous because the toads are toxic and highly invasive.

Here we show that the annual rate of progress of the toad invasion front has increased about fivefold since the toads first arrived; we find that toads with longer legs can not only move faster and are the first to arrive in new areas, but also that those at the front have longer legs than toads in older (long-established) populations.

Over many generations, rates of invasion will be accelerated owing to rapid adaptive change in the invader, with continual 'spatial selection' at the expanding front favouring traits that increase the toads' dispersal.

Modeling by PDE

We take $x \in [0, L]$ and $y \in \mathbb{R}$;

Equation satisfied by f:

$$\partial_t f(t,x,y) - y\,\Delta_x f(t,x,y) = f(t,x,y)\left[r(y) - \int_{y'\in\mathbb{R}} C(y,y')\,f(t,x,y')\,dy'\right]$$

$$+ \int_{y'\in\mathbb{R}} m(y,y')\,f(t,x,y')\,dy'.$$

Here, $r(y) = cst_1 - cst_2\,y$, $m(y,y') = cst_3\,\exp(cst_4\,(y-y')^2)$,
$C(y,y') = \frac{cst_5}{1+cst_6\,(y-y')^2}$.

Cf. LD-Ferrières-Prevost

Numerical analysis and scientific computation

Computation thanks to an explicit finite difference scheme ($1D$ in x and $1D$ in y).

- Necessity to satisfy various CFL conditions

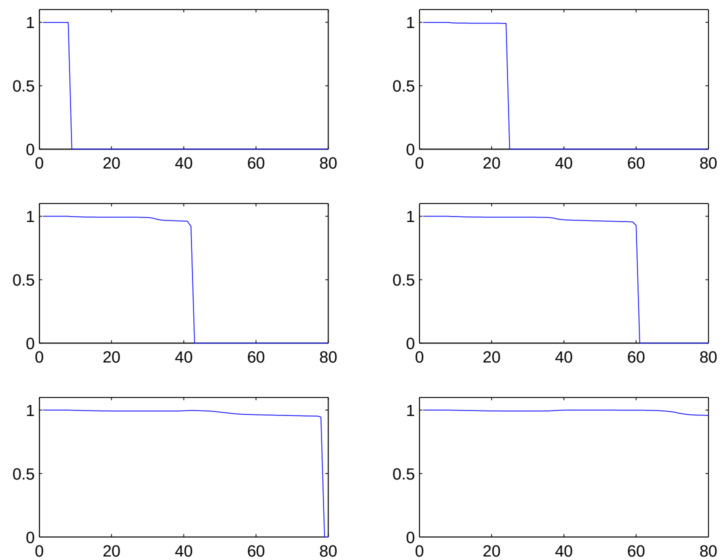
- Expensive because of the kernels in y

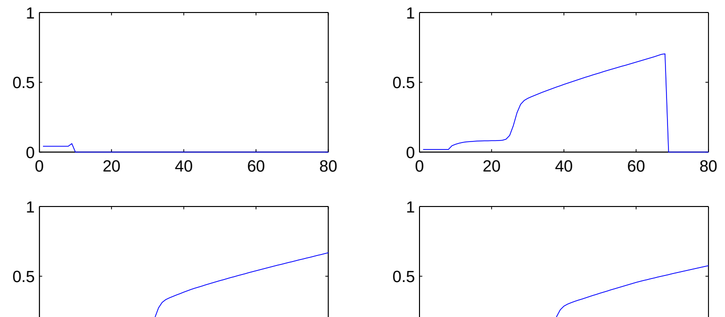
- Programmation in **c**; post-treatment in **matlab**; run time $\sim$ 10 min.

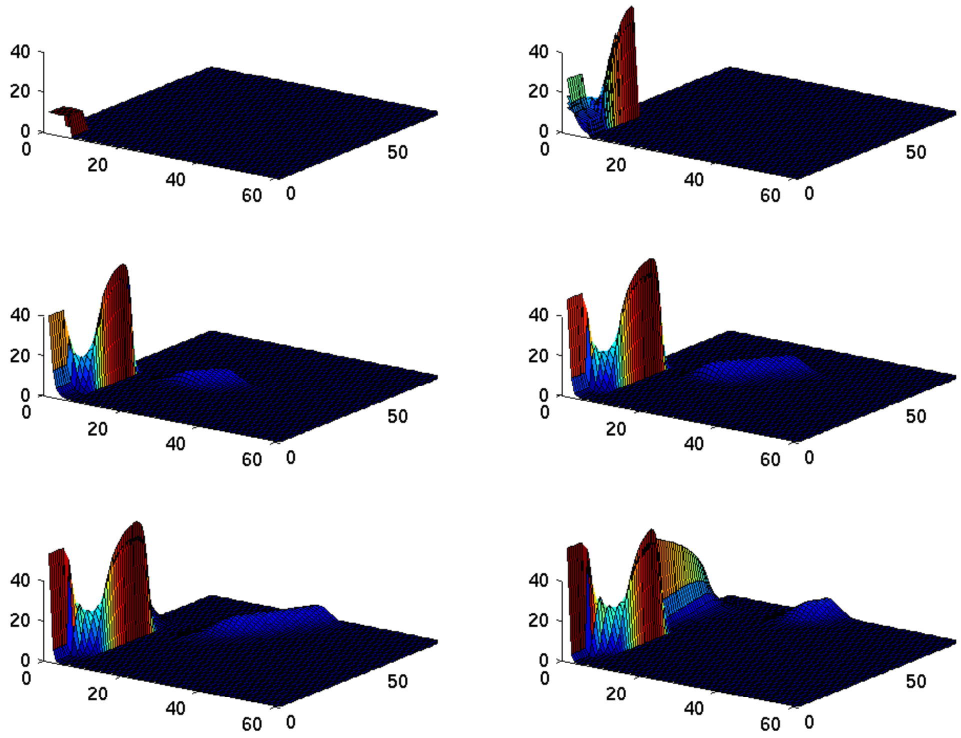
Confrontation with data

- Qualitatively OK

- Robust with respect to change of order of magnitude of parameters

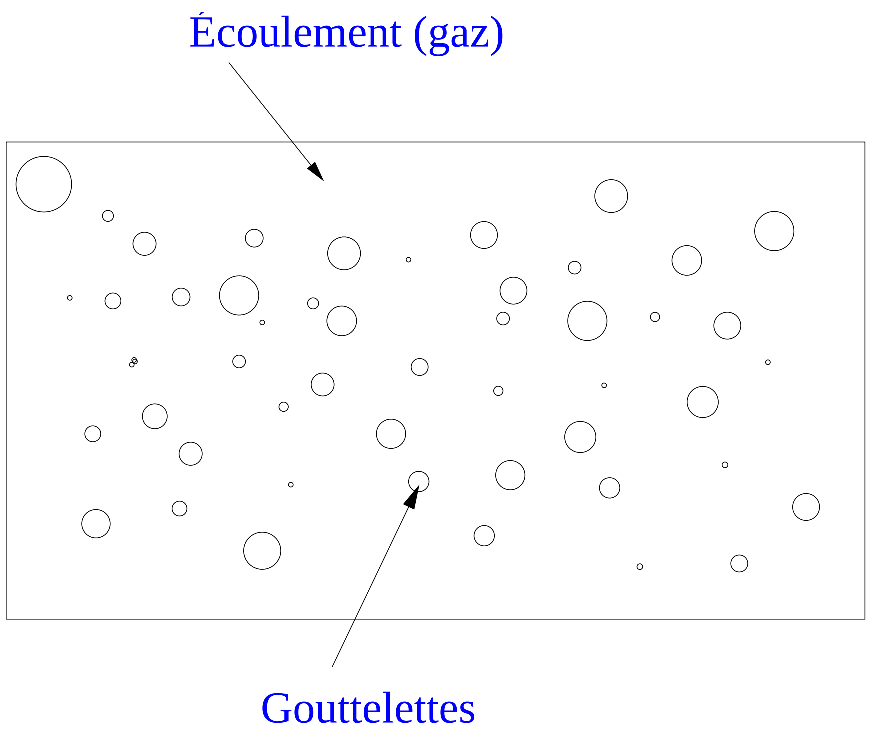






Exemple de présentation en mécanique des fluides

Sprays: Dispersed Phase (i.-e. of small volumic fraction, for example droplets or dust) in an underlying fluid



Examples :
Clouds,
Diesel Engines,
Medical Sprays, etc.

Unknowns

Main quantity for the coupling : volume fraction of gas $\alpha(t,x)$.

1. Unknowns of the gas :

$$\rho_g(t,x), \qquad u_g(t,x), \qquad p(t,x);$$

2. Unknown for the dispersed phase :

$$f(t,x,v,r);$$

Equations (case of isentropic non viscous gas)

$$\partial_t(\alpha\,\rho_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\,\rho_g\,u_g) = 0,$$

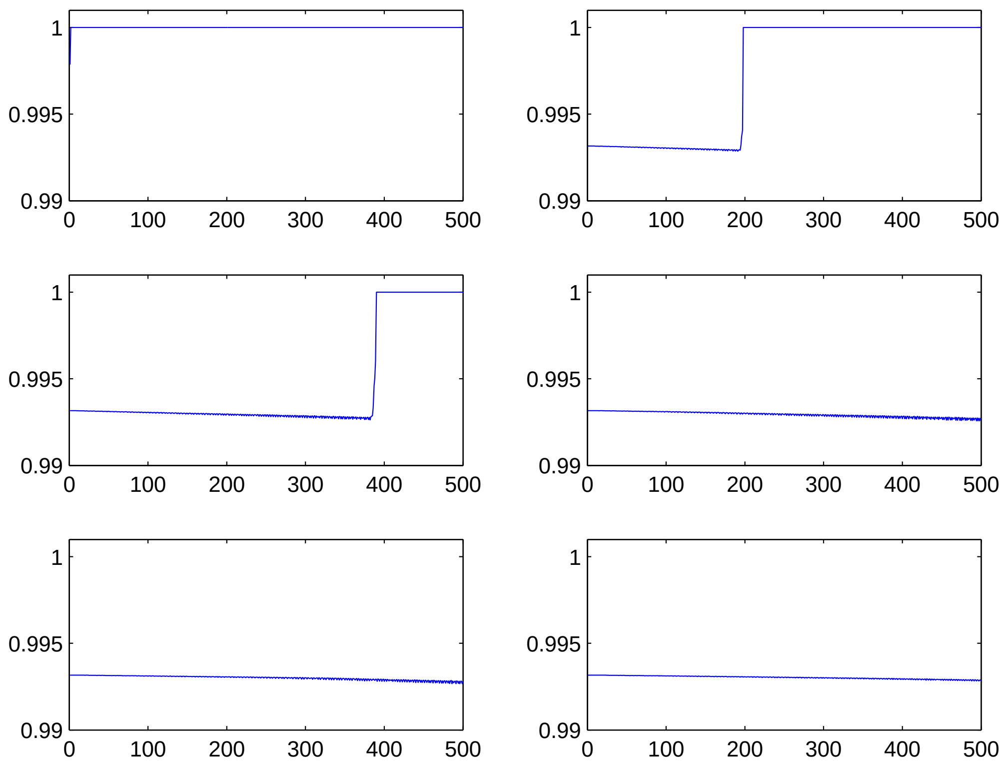
$$\partial_t(\alpha\,\rho_g\,u_g) + \nabla_x \cdot (\alpha\,\rho_g\,u_g \otimes u_g) + \nabla_x p = \int\int_{v,r} -m\,F\,f\,dvdr,$$

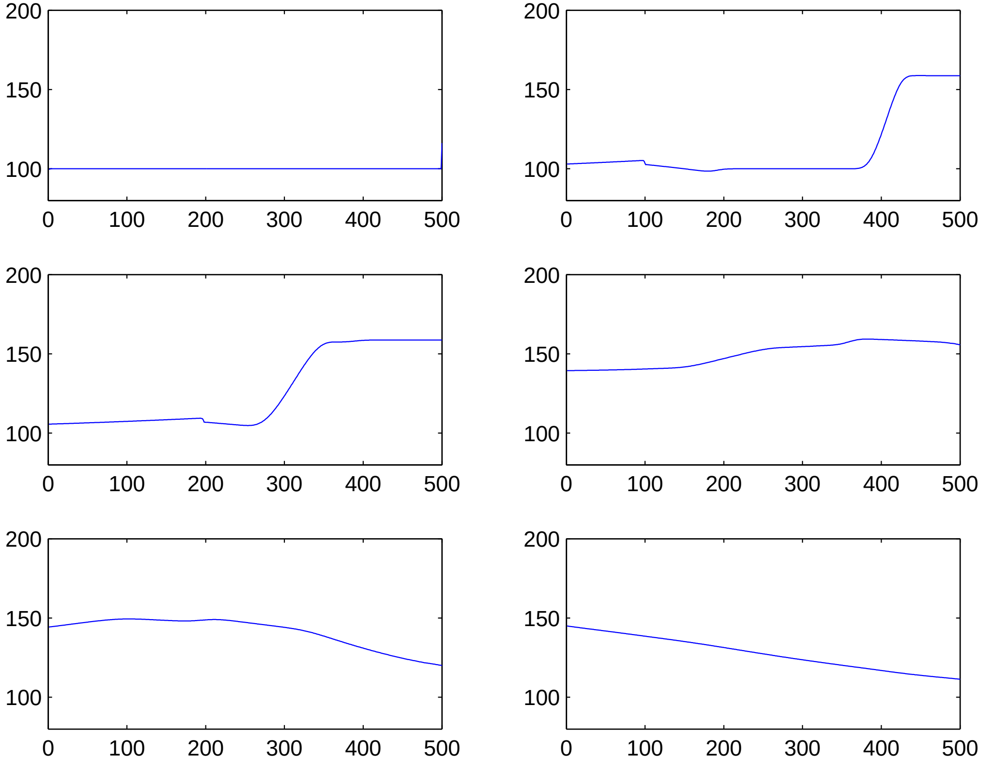
$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F\,f) = Q(f),$$

$$1 - \alpha = \int\int_{v,r} \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,f\,dvdr.$$

$$p = p(\rho_g), \qquad m\,F = -\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\nabla_x p - D\,(v - u_g).$$

Results of simulations




200
150
100
0
100
200
300
400
500

Difficultés et questionnements

1. Difficultés de compatibilité entre les documents administratifs et les documents à contenu mathématique (demandes ANR!),
2. Question de la concurrence entre logiciels gratuits et commerciaux (matlab,scilab; maple,mupad), liée à la collaboration internationale/industrielle, et aux formations pilotées par le monde économique,
3. Ramifications des logiciels gratuits (TeX),
4. Question éditoriale: évolution des sociétés commerciales d'édition scientifique?
5. Difficultés des laboratoires pour le maintien de leur parc informatique/logiciels.

Perspectives

1. Mise en place de revues en ligne autorisant la publication de programmes,
2. Arrivée de logiciels d'aide à la correction de copies (de maths),
3. Mise en ligne progressive de textes de cours, TD, examens [rarement des codes sources],
4. Progression de la vitesse d'exécution des programmes: avantage pour matlab? difficultés liées à la parallélisation;
5. Amélioration des collaborations à distance (Skype).

Perspectives plus lointaines et spéculatives

1. Obtention automatique de codes sources [en particulier TeX, mais aussi, matlab] à partir de versions papier,
2. Développement des démonstrations assistées par ordinateur,
3. Mise au point de programmes efficaces de discrétisation automatique, et de parallélisation automatique,
4. Accessibilité gratuite aux connaissances accumulées,
5. Conditions de confort suffisantes pour l'enseignement à distance à un coût acceptable.