Qu'est-ce qui fait preuve en mathématiques ? Pratiques de recherche et de publications au XIXe siècle.

20 novembre 2020
Centre d'Alembert. Université Paris Saclay

Des calculs impraticables : la résolution des équations dans les travaux d'Évariste Galois

Caroline Ehrhardt
IDHE-S, Université Paris 8

Comprendre la logique et le sens du jugement académique sur le travail de Galois dans le contexte mathématique des années 1830

Comprendre le sens et la logique des actions de Galois dans ce contexte

1. Le nécessaire processus de validation académique

1. a. l’Académie des sciences comme instance de validation du travail de Galois

- l'Académie occupe une position dominante dans le champ mathématiques des années 1820-1830

- c'est une instance d'évaluation, mais dans les faits tous les travaux envoyés ne sont pas évalués

- on a des sources qui laissent penser que les académiciens entretiennent également des relations d'ordre "privé" avec les auteurs (conseil, soutien, etc.).

Ex: Cauchy et Galois (R. Taton)

1. b. Le rapport de Poisson et Lacroix (1831)

« Nous ignorons si Abel a laissé un manuscrit de cette théorie. Elle n'a point été imprimée, non plus que la démonstration du théorème analogue à celui qui fait l'objet de ce rapport et qui appartiendrait entièrement à M. Galois, s'il parvenait à l'établir d'une manière satisfaisante. Toutefois, on doit remarquer qu'il ne renferme pas, comme le titre du Mémoire le promettait, la condition de résolubilité des équations par radicaux ; car en admettant comme vraie la proposition de M. Galois, on ne serait guère plus avancé pour savoir si une équation donnée dont le degré est un nombre premier est résolue ou non par radicaux, puisqu'il faudrait d'abord s'assurer si cette équation est irréductible, et ensuite si l'une des racines peut s'exprimer en fonction rationnelle des deux autres. La condition de résolubilité, si elle existe, devrait être un caractère extérieur que l'on pût vérifier à l'inspection des coefficients d'une équation donnée ou, tout au plus, en résolvant d'autres équations d'un degré moins élevé que celui de la proposée.

Quoiqu'il en soit, nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de M. Galois. Ses raisonnements ne sont ni assez clairs, ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude, et nous ne serions pas en état d'en donner une idée dans son Rapport. L'auteur annonce que la proposition qui fait l'objet spécial de son Mémoire est une partie d'une théorie générale susceptible de beaucoup d'autres applications. Souvent il arrive que les différentes parties d'une théorie, en s'éclairant mutuellement, sont plus faciles à saisir dans leur ensemble qu'isolément. On peut donc attendre que l'auteur ait publié en entier son travail pour se former une opinion définitive ; mais dans l'état où est maintenant la partie qu'il a soumise à l'académie, nous ne pouvons pas proposer d'y donner votre approbation. ».

- **le type de résultat que l'on considère comme valable, et la méthode à laquelle on s'attend pour y parvenir**

« Ce théorème (…) appartiendrait entièrement à M. Galois, s'il parvenait à l'établir d'une manière satisfaisante. Toutefois, on doit remarquer qu'il ne renferme pas, comme le titre du Mémoire le promettait, la condition de résolubilité des équations par radicaux ; car en admettant comme vraie la proposition de M. Galois, on ne serait guère plus avancé pour savoir si une équation donnée dont le degré est un nombre premier est résolue ou non par radicaux, puisqu'il faudrait d'abord s'assurer si cette équation est irréductible, et ensuite si l'une des racines peut s'exprimer en fonction rationnelle des deux autres. La condition de résolubilité, si elle existe, devrait être un caractère extérieur que l'on pût vérifier à l'inspection des coefficients d'une équation donnée ou, tout au plus, en résolvant d'autres équations d'un degré moins élevé que celui de la proposée.

Quoiqu'il en soit, nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de M. Galois. Ses raisonnements ne sont ni assez clairs, ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude, et nous ne serions pas en état d'en donner une idée dans son Rapport. L'auteur annonce que la proposition qui fait l'objet spécial de son Mémoire est une partie d'une théorie générale susceptible de beaucoup d'autres applications. Souvent il arrive que les différentes parties d'une théorie, en s'éclairant mutuellement, sont plus faciles à saisir dans leur ensemble qu'isolément. On peut donc attendre que l'auteur ait publié en entier son travail pour se former une opinion définitive ; mais dans l'état où est maintenant la partie qu'il a soumise à l'académie, nous ne pouvons pas proposer d'y donner votre approbation ».

- la question des applications, et en particulier du lien qu'elles entretiennent avec la « théorie générale »

« Ce théorème (...) appartiendrait entièrement à M. Galois, s'il parvenait à l'établir d'une manière satisfaisante. Toutefois, on doit remarquer qu'il ne renferme pas, comme le titre du Mémoire le promettait, la condition de résolubilité des équations par radicaux ; car en admettant comme vraie la proposition de M. Galois, on ne serait guère plus avancé pour savoir si une équation donnée dont le degré est un nombre premier est résolue ou non par radicaux, puisqu'il faudrait d'abord s'assurer si cette équation est irréductible, et ensuite si l'une des racines peut s'exprimer en fonction rationnelle des deux autres. La condition de résolubilité, si elle existe, devrait être un caractère extérieur que l'on pût vérifier à l'inspection des coefficients d'une équation donnée ou, tout au plus, en résolvant d'autres équations d'un degré moins élevé que celui de la proposée.

Quoiqu'il en soit, nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de M. Galois. Ses raisonnements ne sont ni assez clairs, ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude, et nous ne serions pas en état d'en donner une idée dans son Rapport. L'auteur annonce que la proposition qui fait l'objet spécial de son Mémoire est une partie d'une théorie générale susceptible de beaucoup d'autres applications. Souvent il arrive que les différentes parties d'une théorie, en s'éclairant mutuellement, sont plus faciles à saisir dans leur ensemble qu'isolément. On peut donc attendre que l'auteur ait publié en entier son travail pour se former une opinion définitive ; mais dans l'état où est maintenant la partie qu'il a soumise à l'académie, nous ne pouvons pas proposer d'y donner votre approbation. ».

- l'originalité, en lien avec les travaux d'Abel

« Nous ignorons si Abel a laissé un manuscrit de cette théorie. Elle n'a point été imprimée, non plus que la démonstration du théorème analogue à celui qui fait l'objet de ce rapport et qui appartiendrait entièrement à M. Galois, s'il parvenait à l'établir d'une manière satisfaisante. Toutefois, on doit remarquer qu'il ne renferme pas, comme le titre du Mémoire le promettait, la condition de résolubilité des équations par radicaux ; car en admettant comme vraie la proposition de M. Galois, on ne serait guère plus avancé pour savoir si une équation donnée dont le degré est un nombre premier est résolue ou non par radicaux, puisqu'il faudrait d'abord s'assurer si cette équation est irréductible, et ensuite si l'une des racines peut s'exprimer en fonction rationnelle des deux autres. La condition de résolubilité, si elle existe, devrait être un caractère extérieur que l'on pût vérifier à l'inspection des coefficients d'une équation donnée ou, tout au plus, en résolvant d'autres équations d'un degré moins élevé que celui de la proposée.

Quoiqu'il en soit, nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de M. Galois. Ses raisonnements ne sont ni assez clairs, ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude, et nous ne serions pas en état d'en donner une idée dans son Rapport. L'auteur annonce que la proposition qui fait l'objet spécial de son Mémoire est une partie d'une théorie générale susceptible de beaucoup d'autres applications. Souvent il arrive que les différentes parties d'une théorie, en s'éclairant mutuellement, sont plus faciles à saisir dans leur ensemble qu'isolément. On peut donc attendre que l'auteur ait publié en entier son travail pour se former une opinion définitive ; mais dans l'état où est maintenant la partie qu'il a soumise à l'académie, nous ne pouvons pas proposer d'y donner votre approbation. ».

2. Les critères de l'Académie des sciences en matière de mathématiques

2. a. Actualité scientifique et intérêt du sujet « résolution algébrique des équations »

Les recherches d'Abel

présentées sans succès en 1826
publiées ensuite dans le *Journal de Crelle*
reconnaissance académique posthume (Grand Prix de 1830)

> " J'ai été assez heureux" dit-il "de trouver une règle sûre à l'aide de laquelle on pourra reconnaître si une équation quelconque proposée est résoluble ou non à l'aide de radicaux. Un corollaire de ma théorie fait voir que généralement il est impossible de résoudre les équations supérieures au 4e degré". Nous ignorons si Abel a laissé un manuscrit de cette théorie; elle n'a point encore été imprimée, non plus que la démonstration du théorème analogue à celui qui fait l'objet de ce Rapport" (extrait du rapport de Poisson)

Abel

Il est impossible de résoudre par radicaux les équations générales de degré supérieure au cinquième.

Galois

Pour qu'une équation irréductible de degré premier soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que, deux quelconques de ses racines étant connues, les autres se déduisent rationnellement

2. b. Qu’est ce qu’on entend par « résoudre une équation »?

Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, Lagrange 1797

TRAITÉ

DE LA RÉSOLUTION

DES

ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

DE TOUS LES DEGRÉS,

Avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des équations algébriques;

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts et du Bureau des Longitudes, Membre du Sénat Conservateur, et Grand-Officier de la Légion d'Honneur.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1808.

"Quand même on parviendrait à résoudre généralement le cinquième degré et les suivants, on n’aurait par là que des formules algébriques, précieuses en elles-mêmes mais très peu utiles pour la résolution effective et numérique des équations des mêmes degrés et qui, par conséquent, ne dispenseraient pas d’avoir recours aux méthodes arithmétiques"

2.c. La mise en application comme critère de clarté et de validation

Calcul et clarté

> Le Mémoire dont nous venons de rendre compte est le premier où l'on trouve traité par l'analyse, avec la généralité qui lui est propre, un sujet déjà ancien. La clarté des calculs et la méthode avec laquelle l'auteur les expose, annoncent que les ouvrages d'Euler lui sont familiers et qu'il est fort exercé dans l'application de l'analyse à la géométrie et à la mécanique. « Nous pensons que son travail mérite l'approbation de l'Académie.» (3 février 1823)

« Que M. Libri passe au tableau pour exposer sa méthode, la craie à la main, avec tous les développements nécessaires; les géomètres ne manquent pas ici, et ils sauront de suite à quoi s'en tenir. On ne résout pas des équations en se bornant à affirmer, comme M. Libri, qu'il est facile de les résoudre, qu'il est facile de ranger toutes les racines dans un groupe unique, etc.; il faut montrer comment les principes qu'on a posés conduisent à tout cela » (Liouville, 1843)

Applications et utilité

« Au reste, malgré les observations que nous venons de faire sur le travail de M. Brisson, et quoique le sens des formules sur lesquelles repose la méthode d'intégration par les équations linéaires, ne nous paraisse pas fixé avec assez de précision, nous pensons que l'élégance de cette méthode et l'importance des objets auxquels elle s'applique, sont des motifs suffisants pour que ce nouveau Mémoire soit accueilli favorablement par l'Académie. »(13 juin 1825)

« [Ces] recherches portent éminemment le cachet des travaux de Fourier, travaux où chaque découverte théorique est illustrée par des applications importantes ; tandis que chaque grande application, impraticable avant lui, devient possible par les méthodes d'analyse générale qu'il invente dans ce dessein même. C'est le double succès que l'on admire surtout dans sa théorie mathématique de la chaleur [en fait, le titre est Théorie analytique de la chaleur] et dans les méthodes d'intégration qui la caractérisent et la fécondent. »
Dupin, « Coup d'œil sur quelques progrès des sciences mathématiques en France depuis 1830 »

Un exemple:
Cauchy, « Sur la détermination du nombre de racines réelles des équations algébriques », 1813

Brève partie théorique

Une seconde partie dédiée à des ajustements et à des classes d'applications

Une troisième partie, qui occupe la moitié du mémoire, pour les applications proprement dites


ANALYSE. 457

MÉMOIRE

Sur la Détermination du nombre des Racines réelles dans les Équations algébriques ;

Extrait de plusieurs Mémoires lus à l'Institut, dans le courant de l'année 1813.

Par A. L. CAUCHY, *Ingénieur des Ponts et Chaussées.*

I.re SECTION.

EXPOSITION GÉNÉRALE DE LA THÉORIE.

§. I.er LES géomètres se sont beaucoup occupés de la question qui fait l'objet de ce mémoire ; et qui peut être envisagée sous deux points de vue différens, selon qu'il s'agit des équations littérales, ou que l'on considère une équation dont tous les coefficiens sont donnés en nombres. Dans le second cas, on résout complétement le problème en formant par les règles connues une équation auxiliaire dont les racines sont les carrés des différences entre celles de la proposée ; ce qui fournit le moyen d'assigner une quantité moindre que la plus petite de ces différences, et par suite de fixer avec le nombre des racines réelles, des limites entre lesquelles chacune des racines est comprise. Mais, relativement aux équations littérales, la question consiste à trouver des fonctions rationnelles de leurs coefficiens, dont les signes déterminent dans chaque cas particulier le nombre et l'espèce de leurs racines réelles. Or on n'était, jusqu'à présent, que pour un petit nombre d'équations d'une forme déterminée que l'on avait réussi

XVII.e Cahier. Mmm

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Rapport de Poisson

« On peut reprocher à cette méthode l'extrême complication des calculs et le grand nombre d'équations auxiliaires qu'il faudra former. Mais M. Cauchy indique dans son Mémoire quelques considérations qu'il propose de développer par la suite, et d'après lesquelles il annonce qu'au lieu de former plusieurs séries d'équations auxiliaires, on pourra n'en former qu'une seule, ce qui réduira beaucoup les calculs. »

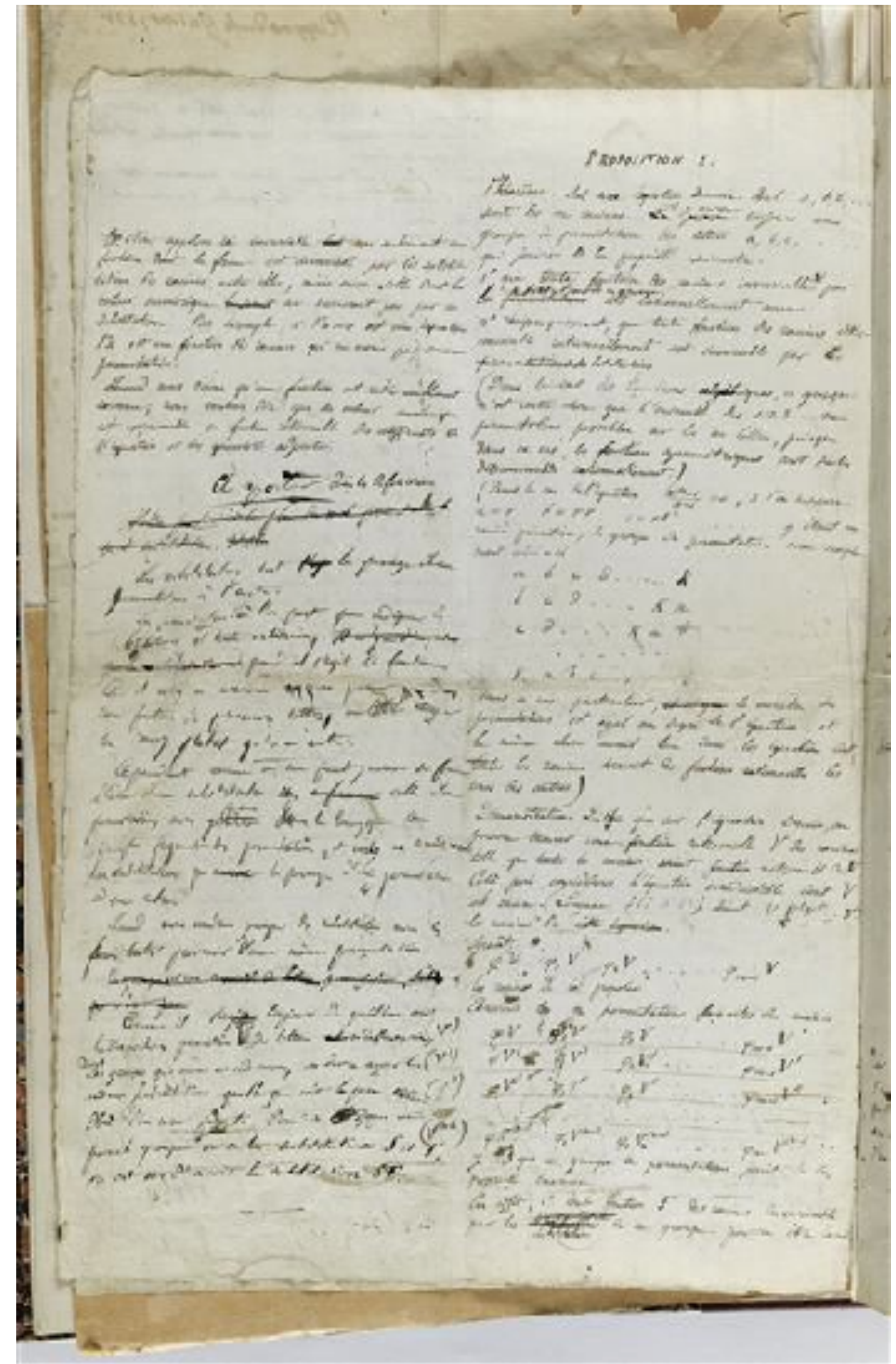
« Malgré ces difficultés, on peut tirer du Mémoire de M. Cauchy cette conclusion générale et importante: qu'il existe pour les équations de tous les degrés certaines fonctions de leurs coefficients dont les signes déterminent le nombre et la nature de leurs racines réelles. De plus, sans résoudre aucune équation, on sera toujours certain d'obtenir ces fonctions, en suivant la méthode que l'auteur propose et en ayant égard à la circonstance des racines égales que nous venons d'indiquer ».

3. Pratiques de travail, de démonstration, de rédaction dans les recherches de Galois

3. a. "Autant de français que d'algèbre"

" Il eût été si facile encore de substituer successivement toutes les lettres de l'alphabet dans chaque équation en les numérotant pas ordre pour pouvoir reconnaître à quelle combinaison de lettres appartiennent toutes les équations subséquentes ; ce qui eût multiplié indéfiniment le nombre des équations, si l'on réfléchit qu'après l'alphabet latin, il y a encore l'alphabet grec, que, celui-ci épuisé, il reste les caractères allemands, que rien n'empêche de se servir des lettres syriaques, et au besoin des lettres chinoises"

Galois, "Préface"



Indiquer (en français) la "marche de l'analyse"

Proposition V

Suivons la marche des opérations possibles dans cette solution, en considérant comme opérations distinctes, l'extraction de chaque racine de degré premier.

Adjoignons à l'équation le premier radical extrait dans la solution ; il pourra arriver deux cas : ou bien, par l'adjonction de ce radical, le groupe de l'équation sera diminué ; ou bien [...] le groupe restera le même.

Toujours sera-t-il qu'après un certain nombre FINI d'extractions de racines, le groupe devra se trouver diminué, sans quoi l'équation ne serait pas soluble...

Donner à voir (par un formalisme) le processus pour "l'appliquer"

« Il est aisé d'observer cette marche dans la résolution connue des équations générales du 4ème degré. En effet, ces équations se résolvent au moyen d'une équation du 3ème degré, qui exige elle-même l'extraction d'une racine carrée. Dans la suite naturelle des idées, c'est donc par une racine carrée qu'il faut commencer. Or en adjoignant à l'équation du quatrième degré cette racine carrée, le groupe de l'équation qui contenait en tout 24 substitutions, se décompose en deux qui n'en contiennent que douze. En désignant par a b c d les racines, voici l'un de ces groupes :

a b c d	a c d b	a d b c
b a d c	c a b d	d a c b
c d a b	d b a c	b c a d
d c b a	b d c a	c b d a

Maintenant ce groupe se partage lui-même en trois groupes, comme il est indiqué aux théorèmes II et III. Ainsi par l'extraction d'un seul radical du troisième degré il reste simplement le groupe :

a b c d
b a d c
c d a b
d c b a

Ce groupe se partage lui-même en deux groupes :

a b c d	c d a b
b a d c	d c b a

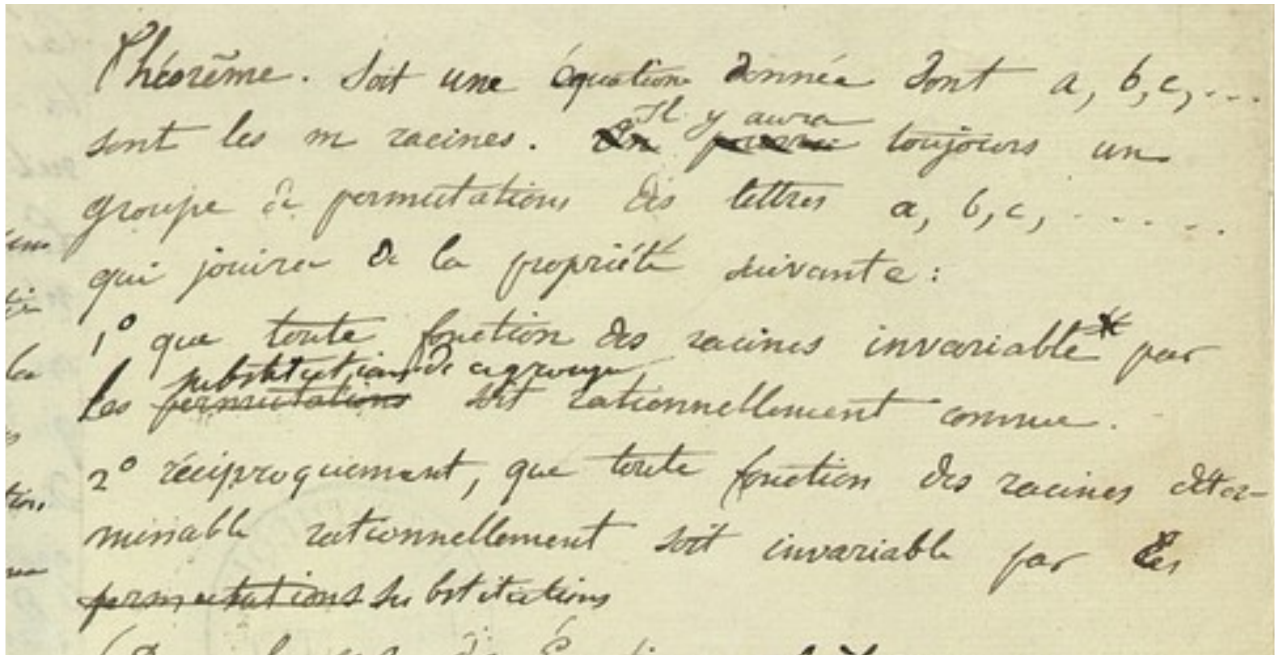
Ainsi, après une simple extraction de racines carrée, il restera :

a b c d
b a d c

Ce qui se résoudra enfin par une simple extraction de racine carrée. »

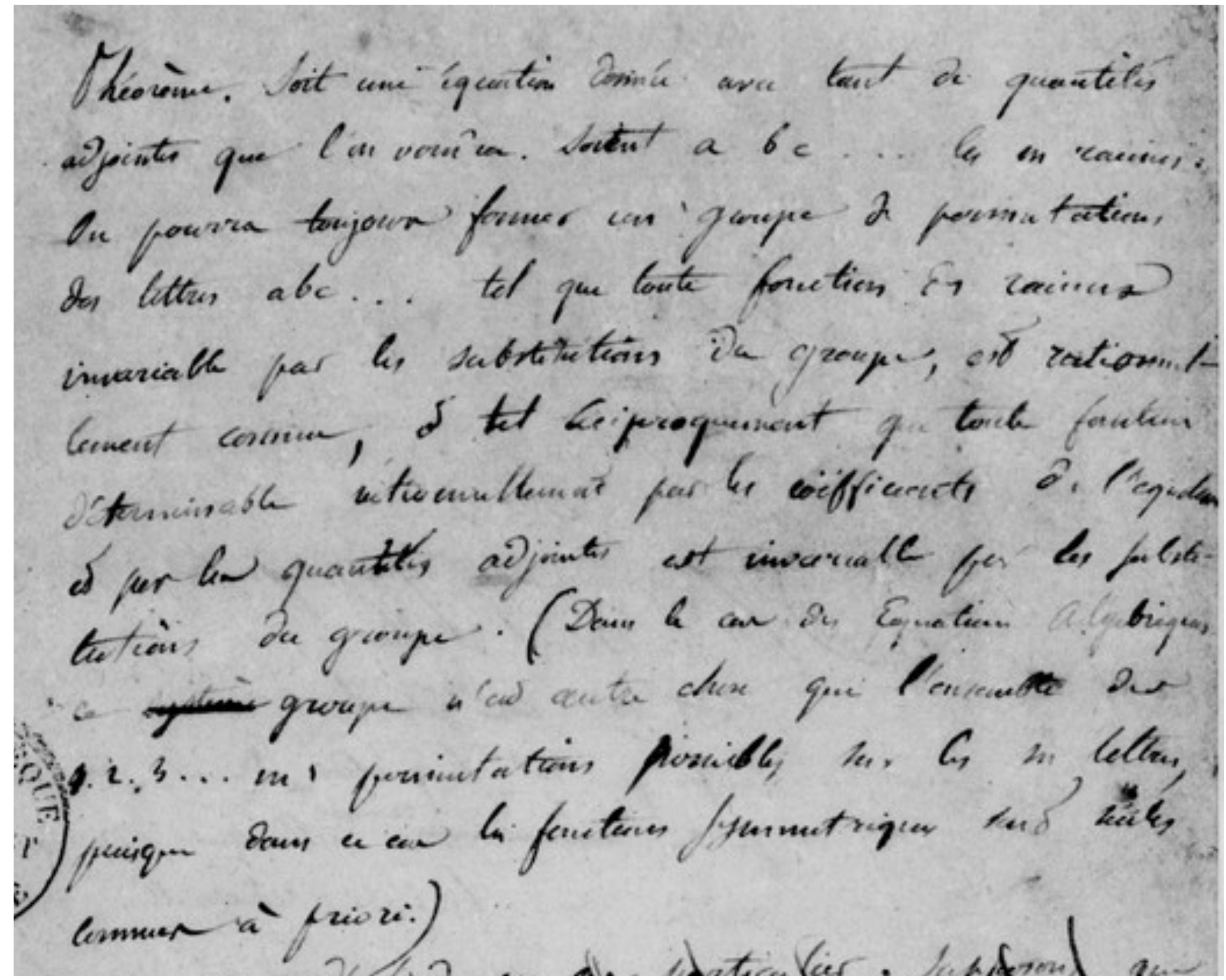
3. b. Des calculs "impraticables "

1831



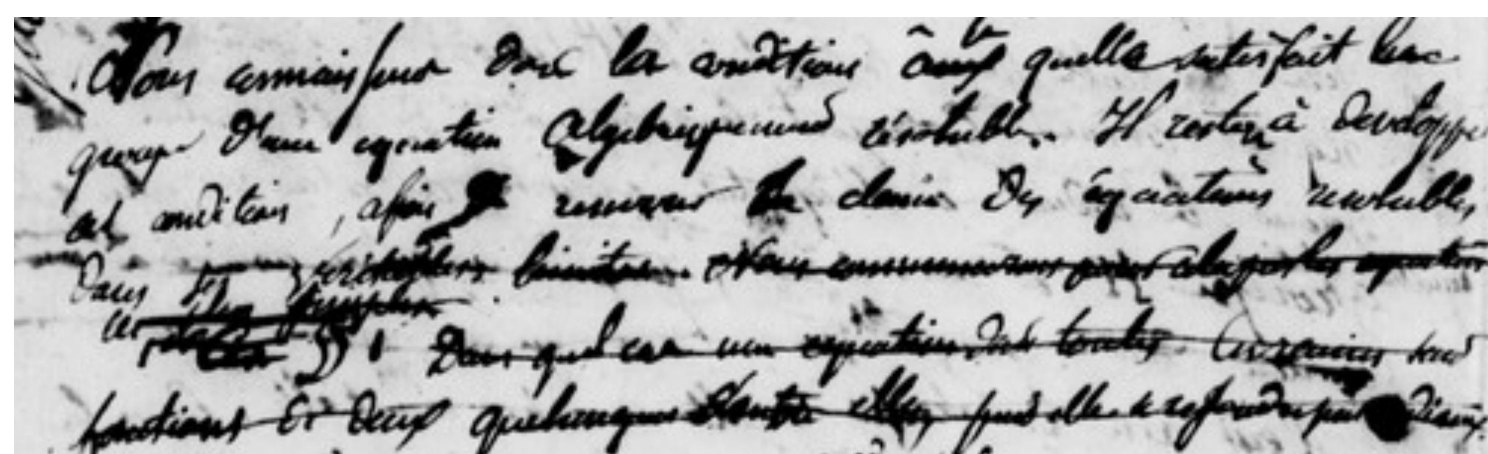
Théorème. Soit une équation donnée dont a, b, c, ... sont les m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres a, b, c, ... qui jouira de la propriété suivante :
1° que toute fonction des racines invariable* par les ~~permutations~~ substitutions de ce groupe soit rationnellement connue.
2° réciproquement, que toute fonction des racines déterminable rationnellement soit invariable par les ~~permutations~~ substitutions

juin 1830



Théorème. Soit une équation donnée avec tant de quantités adjointes que l'on voudra. Soient a b c ... les m racines. On pourra toujours former un groupe de permutations des lettres abc... tel que toute fonction des racines invariable par les substitutions du groupe, soit rationnellement connue, et tel réciproquement que toute fonction déterminable rationnellement par les coefficients de l'équation et par les quantités adjointes est invariable par les substitutions du groupe. (Dans le cas des équations algébriques ce ~~système~~ groupe n'est autre chose que l'ensemble des 1.2.3...m permutations possibles sur les m lettres, puisque dans ce cas les fonctions symétriques sont seules connues a priori.)

Nous connaissons donc la condition à laquelle satisfait le groupe d'une équation algébriquement résoluble. Il restera à développer ces conditions, afin de resserrer la classe des équations résolubles dans ses véritables limites. Nous commencerons pour cela par les équations les plus simples.



Nous connaissons donc la condition à laquelle satisfait le groupe d'une équation algébriquement résoluble. Il reste à développer ces conditions, afin de resserrer la classe des équations résolubles dans ~~ses véritables limites. Nous commencerons par ...~~

Propositions 2

Théorème. Si l'on adjoint à une équation ^donnée^ la racine ^r^ d'une équation auxiliaire irréductible, ~~et de degré ^p^ premier~~, ⌜1°⌝ il arrivera de deux choses l'une: ou bien le groupe de l'équation ne sera pas changé; ou bien il se partagera en p groupes appartenant ^chacun^ à l'équation proposée respectivement quand on lui adjoint chacune des racines de l'équation auxiliaire. 2°. ces groupes jouiront de la propriété remarquable, que l'on passera de l'un à l'autre en opérant dans toutes les permutations du premier une même substitution de lettres.

*Il y a quelque chose à completer dans cette démonstration. Je n'ai pas le tems. (Note de l'A.) *

.1°. Si, après l'adjonction de r, l'équation en V, dont il est question plus haut reste irréductible, il est clair que le groupe de l'équation ne sera pas changé. Si au contraire elle se réduit, alors l'équation en V se décomposera en p facteurs ^tous^ de même degré et de la forme⋆

* ~~⋆Car si l'on élimine r entre $f(V,r)=0$ et $Fr=0$ Fr étant de degré premier p, il ne peut arriver que de deux choses l'une: ou le resultat de l'élimination sera demême degré en V que $f(V,r)$, ou il sera d'un degré |multiplie de| p fois plus grand.~~ *

$$f(V,r)\times f(V,r')\times f(V,r'')\times\ \cdots\cdots$$

$r \quad r' \quad r'' \quad \cdots\cdot$ étant ~~les diverses~~ ^d'autres^ valeurs de r. Ainsi le groupe de l'équation proposée se décomposera aussi ~~les~~ en ~~p~~ groupes chacun d'un même nombre de permutation, puisqu'à chaque valeur de V correspond une permutation. Ces groupes seront respectivement ceux de l'équation proposée, quand on lui adjoindra successivement $r,\quad r',\quad r'',\quad \ldots.$

4 b

2°. Nous avons vu plus haut que toutes les valeurs de V étaient des fonctions rationnelles les unes des autres. D'après celà, supposons que V étant une racine de $f(V,r)=0$, $F(V)$ en soit une autre. Il est clair que de même si V' est une racine de $f(V,r')=0$, $F(V')$ en sera une autre.⋆

* ⋆Car l'on aura $f\big(F(V),r\big)$ = une fonction divisible par $f(V,r)$
Donc, (Lemme I) $f\big(FV',r'\big)$ = une fonction divisible par $f(V',r')$.*

Celà posé, je dis que l'on obtient le groupe relatif à r' en opérant partout dans le groupe relatif à r une même substitution de lettres.

En effet si l'on a par exemple $\varphi_{\cancel{p}n}F(V)=\varphi_n V$ on aura encore, (Lemme I), $\varphi_p\,F(V')=\varphi_n\,V'$. Donc, pour passer de la ~~ligne~~ permutation $\big(F(V)\big)$ à la permutation $\big(F(V')\big)$, il faut faire la même substitution que pour passer de la ~~substituti~~ permutation (V) à la permutation (V').

Le théorème est donc démontré.

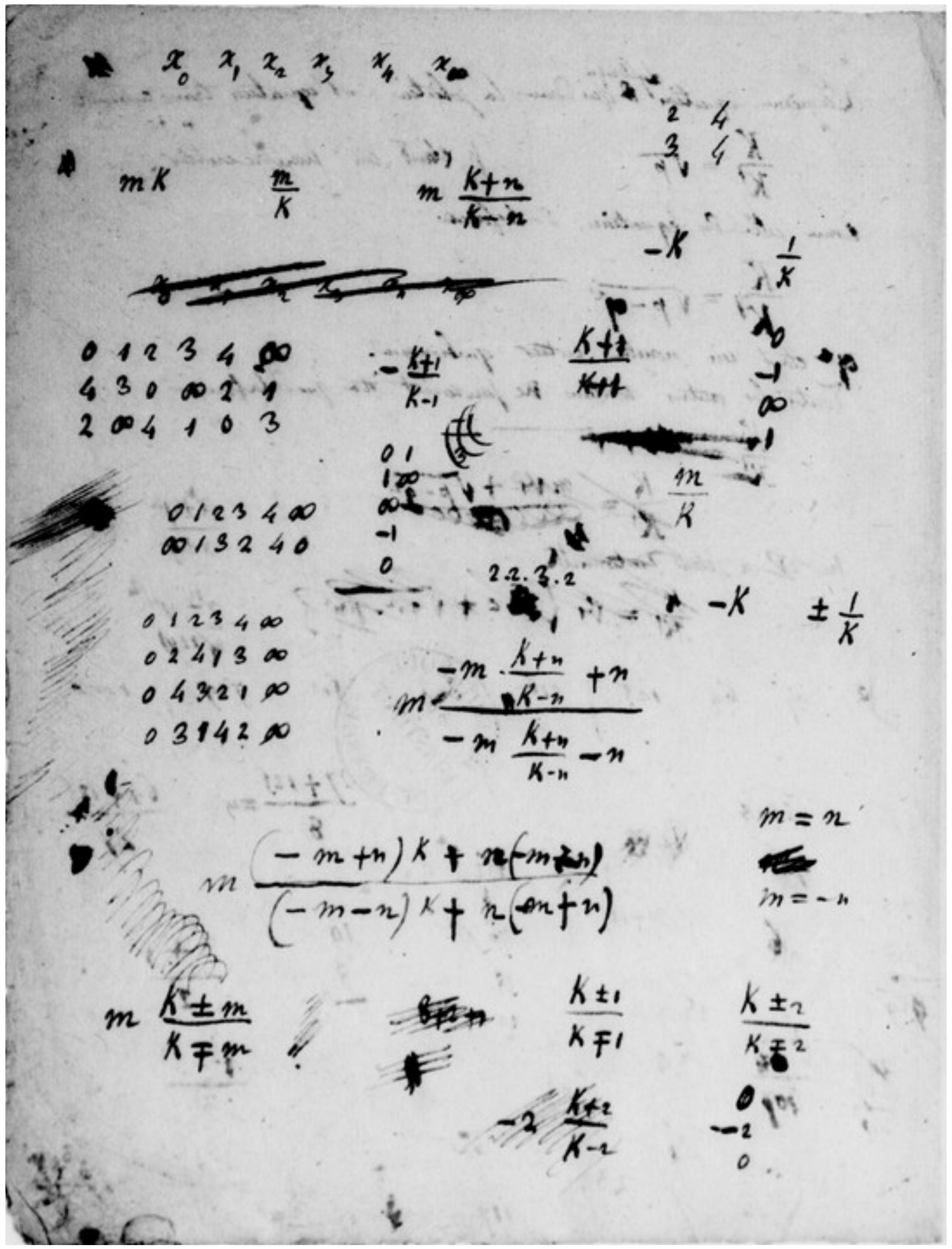
Lettre à Chevalier (1832)

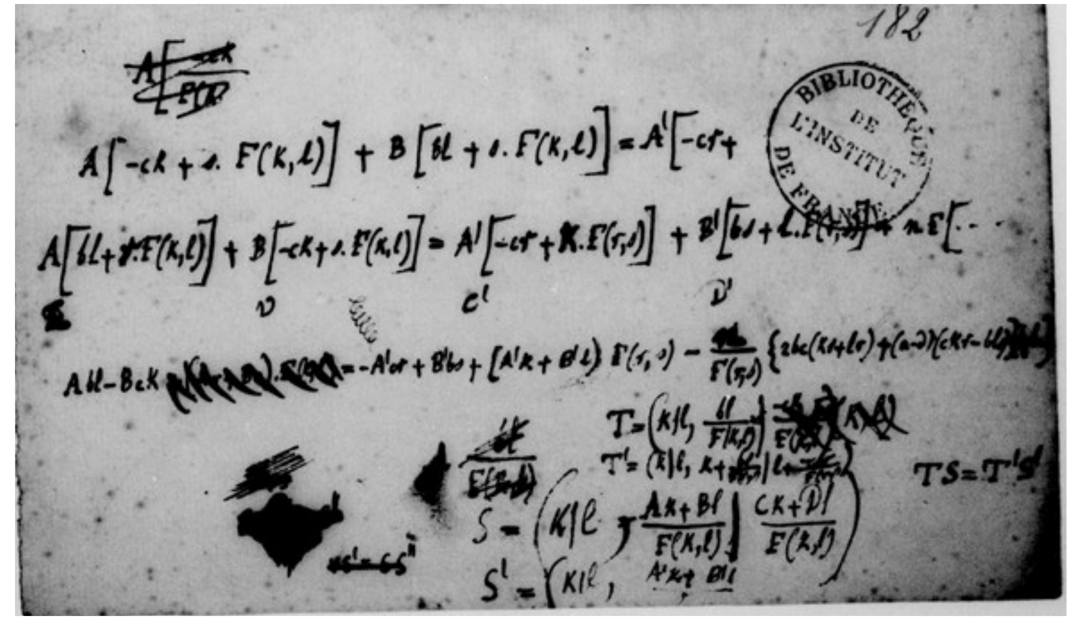
1°. D'après les propositions II et III du 1er Mémoire, on voit une grande différence entre adjoindre à une équation une ^des^ racine⌜s⌝ d'une équation auxiliaire ou les adjoindre toutes.

Dans les deux cas le groupe de l'équation se partage par l'adjonction ~~qui~~ en groupes ~~qui~~ tels que l'on passe de l'un à l'autre par une même substitution. Mais la condition que ~~les mem~~ ces groupes aient les mêmes substitutions n'a lieu certainement que dans le second cas. ~~En d'autres t~~ Celà s'appelle la décomposition propre.

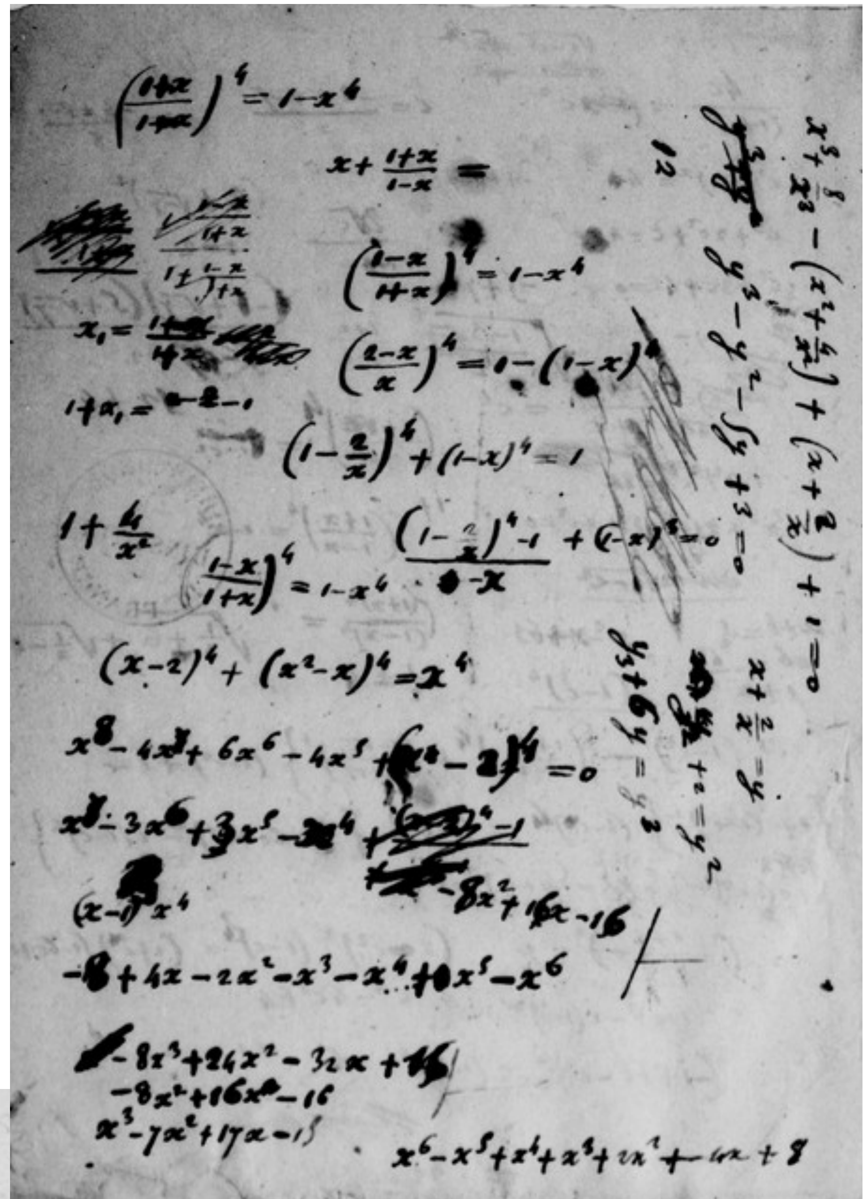
En d'autres termes, quand un groupe ^G^ en contient un autre H le groupe G peut se partager en groupes ~~dans les quels à la place~~ que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution, en sorte $G=H+HS+HS'+\cdots\cdot$ et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions en sorte que $G=H+TH+T'H+\cdots\cdot$ Ces deux ^genres de^ décompositions ne coïncide pas ordinairement. Quand elles coïncident, la décomposition est dite propre.

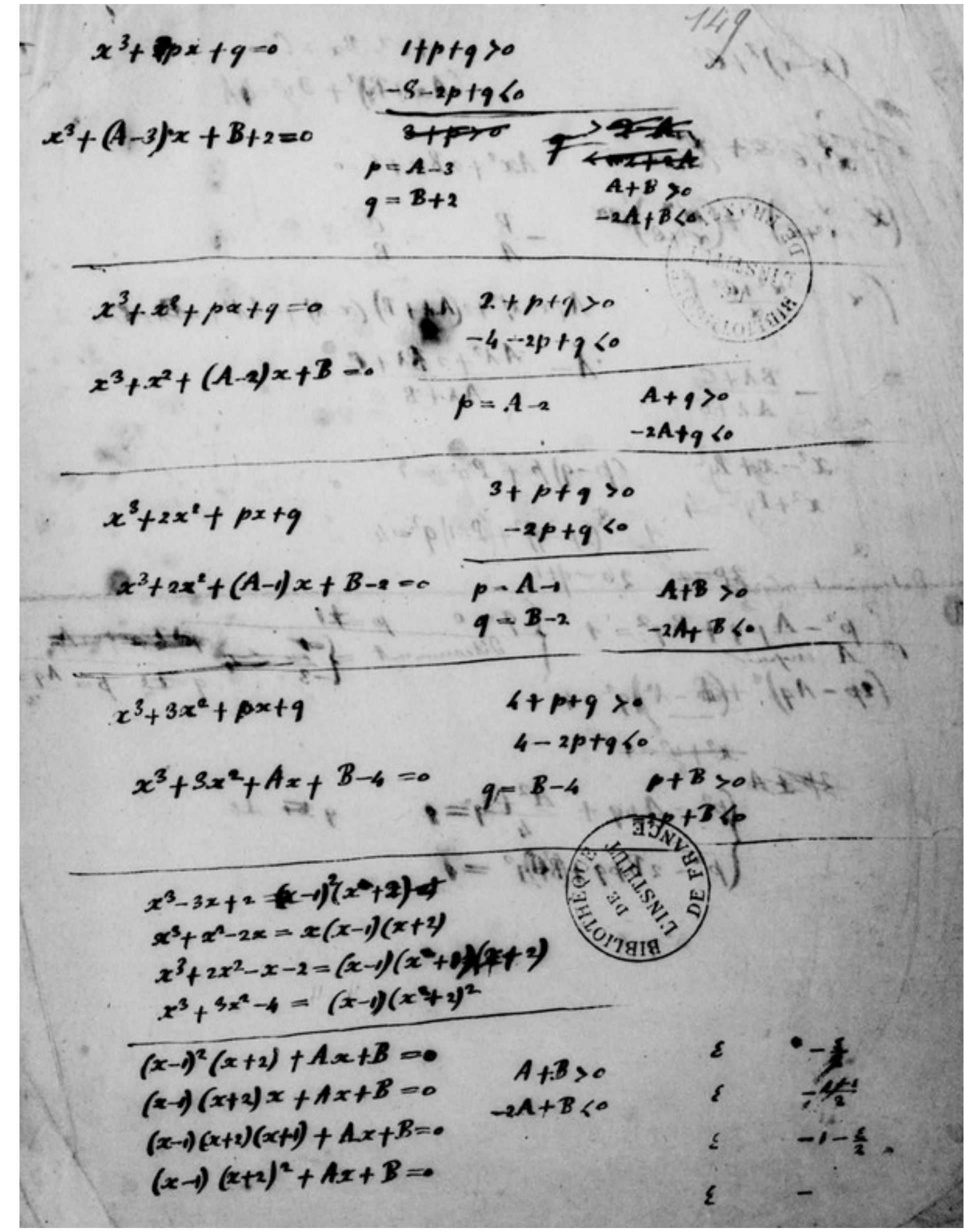
Des brouillons

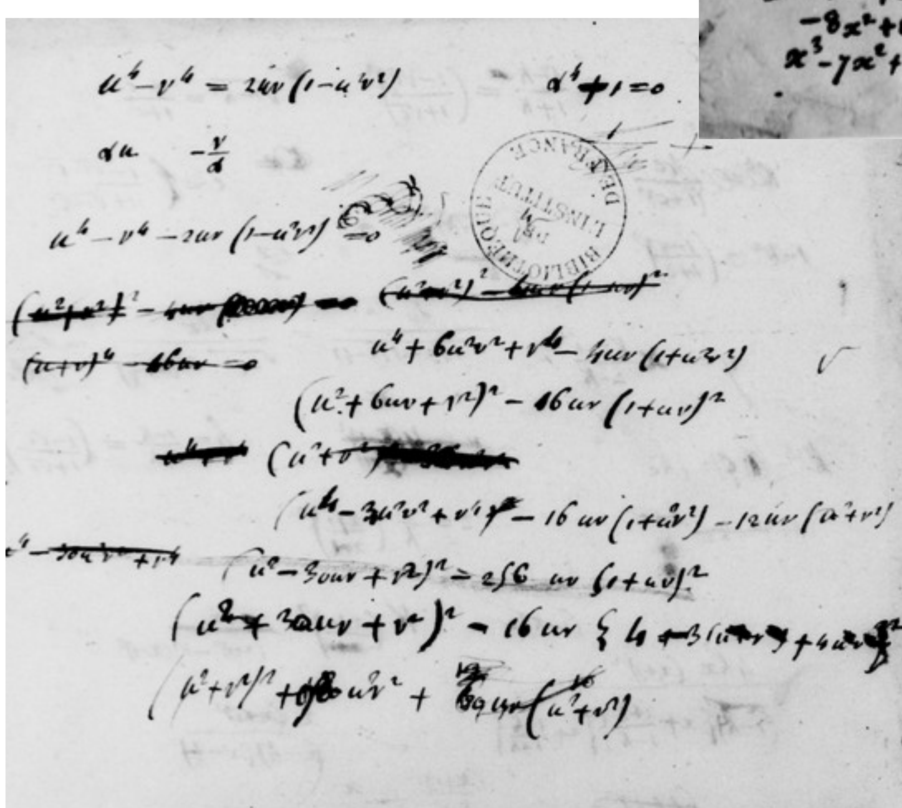




Des calculs


$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4 = 1-x^4$
$x+\frac{1+x}{1-x} =$
$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4 = 1-x^4$
$\left(\frac{2-x}{x}\right)^4 = 1-(1-x)^4$
$\left(1-\frac{2}{x}\right)^4+(1-x)^4=1$
$1+\frac{4}{x^2}$
$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4 = 1-x^4$
$(x-2)^4+(x^2-x)^4=x^4$
$-8+4x-2x^2-x^3-x^4+10x^5-x^6$
$-8x^3+24x^2-32x+16$
$-8x^2+16x-16$
$x^3-7x^2+17x-15$
$x^6-x^5+x^4+x^3+2x^2-4x+8$
$x^5+\frac{8}{x^3}-\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+\left(x+\frac{2}{x}\right)+1=0$
$y^3-y^2-5y+3=0$
$x+\frac{2}{x}=y$


$x^3+px+q=0$
$1+p+q>0$
$-8-2p+q<0$
$x^3+(A-3)x+B+2=0$
$p=A-3$
$q=B+2$
$A+B>0$
$-2A+B<0$
$x^3+x^2+px+q=0$
$2+p+q>0$
$-4-2p+q<0$
$x^3+x^2+(A-2)x+B=0$
$p=A-2$
$A+q>0$
$-2A+q<0$
x^3+2x^2+px+q
$3+p+q>0$
$-2p+q<0$
$x^3+2x^2+(A-1)x+B-2=0$
$p=A-1$
$q=B-2$
$A+B>0$
$-2A+B<0$
x^3+3x^2+px+q
$4+p+q>0$
$4-2p+q<0$
$x^3+3x^2+Ax+B-4=0$
$q=B-4$
$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$
$x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$
$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$
$x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$
$(x-1)^2(x+2)+Ax+B=0$
$(x-1)(x+2)x+Ax+B=0$
$(x-1)(x+1)(x+2)+Ax+B=0$
$(x-1)(x+2)^2+Ax+B=0$
$A+B>0$
$-2A+B<0$


$u^4-v^4=2uv(1-u^2v^2)$
$\alpha^4+1=0$
$u^4-v^4-2uv(1-u^2v^2)=0$
$u^4+6u^2v^2+v^4-4uv(1+u^2v^2)$
$(u^2+6uv+v^2)^2-16uv(1+uv)^2$
$(u^2-30uv+v^2)^2=256uv(1+uv)^2$

Des "tests" de modes d'écritures opératoires

Fol. 84

« Groupe réductible est un groupe dans les permutations duquel n lettres ne sortent pas de n places fixes. Tel le groupe

a b c d e	a b d e c	a b e c d
b a c d e	b a d e c	b a e c d

Un groupe irréductible est tel qu'une lettre donnée occupe une place donnée (…)

Groupe irréductible non primitif est celui où l'on a n places et n lettres telles que une de ces lettres ne puisse occuper une de ces places, sans que les n lettres n'occupent les n places.

Fol. 37b and Fol. 38a "Des équations primitives qui sont solubles par radicaux"

« Cela posé, soient

$$a_0\ a_1\ a_2 \ldots\ a_{P-1}$$
$$b_0\ b_1\ b_2 \ldots\ b_{P-1}$$
$$c_0\ c_1\ c_2 \ldots\ c_{P-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Les N lettres: supposons que chaque ligne horizontale représente un système de lettres conjointes. Soient

$$a_0\ a_{0.1}\ a_{0.2} \ldots\ a_{0.P-1}$$

P lettres conjointes toutes situées dans la première colonne verticale (il est clair que nous pouvons faire qu'il en soit ainsi, en intervertissant l'ordre des lignes horizontales).

Soient de même $a_{1.0}\ a_{1.1}\ a_{1.2} \ldots\ a_{1.P-1}$

P lettres conjointes toutes situées dans la seconde colonne verticale, de sorte que

$$a_{1.0}\ a_{1.1}\ a_{1.2} \ldots\ a_{1.P-1}$$

appartiennent respectivement aux mêmes lignes horizontales que

$$a_0\ a_{0.1}\ a_{0.2} \ldots\ a_{0.P-1}.$$

Soient de même les systèmes de lettres conjointes

$$a_{2.0}\ a_{2.1}\ a_{2.2} \ldots\ a_{2.P-1}$$
$$a_{3.0}\ a_{3.1}\ a_{3.2} \ldots\ a_{3.P-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Nous obtiendrons ainsi en tout P^2 lettres. Si le nombre total de lettres n'est pas épuisé, on prendra un troisième indice, en sorte que

$$a_{m.n.0}\ \ a_{m.n.1}\ \ a_{m.n.2} \ldots\ a_{m.n.P-1}$$

soient en général un système de lettres conjointes. Et l'on parviendra ainsi à cette conclusion que $N=P^{\mu}$, μ étant un certain nombre égal à celui des indices différents dont nous avons besoin. »

fol. 39a (extrait de l'édition Neumann)

Si un groupe G se partage en n groupes conjugués à celui que nous venons de décrire, toutes les substitutions du groupe G devront transformer ^les^ ~~l~~unes dans ^les^ autres les substitutions circulaires du groupe H, qui sont toutes écrites comme il suit

$$\left(a_{k_1.k_2.\cancel{k_3 \cdots k_\nu}}\ ,\quad a_{k_1+\alpha_1.k_2+\alpha_2.\cancel{k_3+\alpha_3} \cdots \cancel{k_\nu+\alpha_\nu}}\right) \qquad (a)$$

Supposons donc que l'une des substitutions du groupe G ~~soit celle-ci~~ se forme en remplacant respectivement

$$\begin{array}{lcl} k_1 & & \varphi_1(k_1\ ,\ k_2)\ \cancel{k_3, \ldots, k_\nu)} \\ & \text{par} & \\ k_2 & & \varphi_2(k_1\ ,\ k_2)\ \cancel{, k_3, \ldots, k_\nu)} \\ \cancel{k_3} & \cancel{\text{par}} & \cancel{\varphi_3(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\nu)} \\ \cancel{\cdot\cdot} & & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \cancel{k_\nu} & & \cancel{\varphi_\nu(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\nu)} \end{array}$$

Si dans les fonctions $\varphi_1\ \ \varphi_2\ \ \cancel{\varphi_3 \ldots \varphi_\nu}$ on substitue pour k_1 et k_2 $\cancel{, k_3,}$ … les valeurs $k_1+\alpha_1\ ,\ k_2+\alpha_2\ \cancel{k_3+\alpha_3, \ldots k}$ il devra venir des resultats de la forme

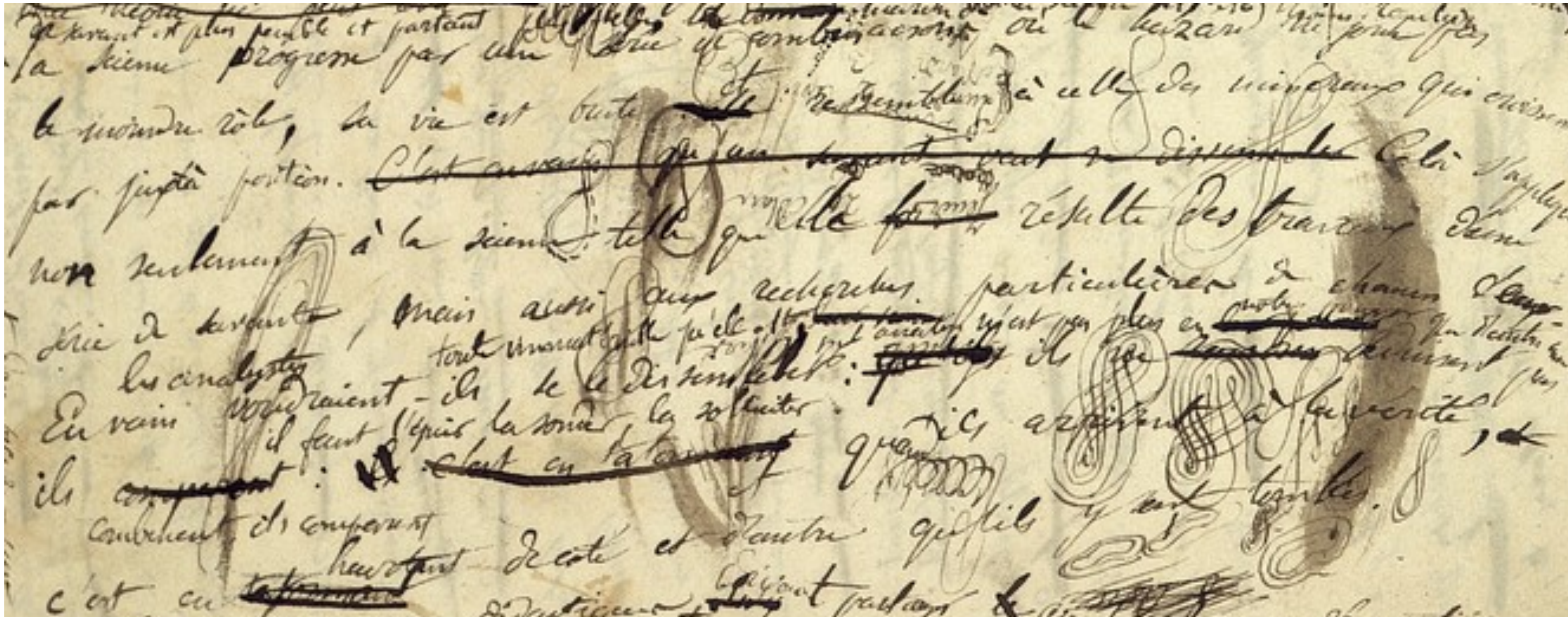
$$\varphi_1+\beta_1 \qquad \varphi_2+\beta_2\ ,$$

et delà il est aisé de conclure immédiatement que les substitutions du groupe G doivent ètre toutes comprises dans la formule

$$\left(a_{k_1.k_2}\ ,\quad a_{m_1k_1+n_1k_2+\alpha_1.\,m_2k_1+n_2k_1+\alpha_2}\right) \qquad (A)$$

Le travail de recherche

discussion sur les progrès de l'analyse pure



Et le travail d'explicitation

Ici on fait l'analyse de l'analyse : ici les calculs les plus élevés exécutés jusqu'à présent sont considérés comme des cas particuliers, qu'il a été utile, indispensable de traiter, mais qu'il serait funeste de ne pas abandonner pour des recherches plus larges. Il sera temps d'effectuer des calculs prévus par cette haute analyse et classés suivant leur difficulté mais non spécifiés dans leur forme quand la spécialité d'une question les réclamera.

La thèse générale que j'avance ne pourra être bien comprise que quand on lira attentivement mon ouvrage, qui en est une application : non que ce point de vue théorique ait précédé l'application ; mais je me suis demandé, mon livre terminé, ce qui le rendrait si étrange à la plupart des lecteurs, et en rentrant en moi-même, j'ai cru observer cette tendance de mon esprit à éviter les calculs dans les sujets que je traitais, et qui plus est, j'ai reconnu une difficulté insurmontable à qui voudrait les effectuer généralement dans les matières que j'ai traitées

Merci de votre attention