Modernisation et renaissance du patrimoine documentaire en mathématiques : Comment faire (re)vivre un savoir ouvert ?

Joël Merker

Institut de Mathématique d'Orsay

11 avril 2022

Patrimoine commun, ou "marchandisation" de la connaissance : comment développer au mieux le savoir mathématique ?

Comment la communauté mathématique articule-t-elle sa production contemporaine de vérités « éternelles », à la valorisation de découvertes anciennes « thésaurisées » dans les bibliothèques ?

Au-delà de la mise à disposition par le monde académique de ses productions actuelles, les bibliothèques elles-mêmes offrent en accès libre un panel de monographies et d'oeuvres complètes, qui sont susceptibles de provoquer des « résurgences thématiques » inattendues.

Et susceptibles, aussi, d'émerveiller les lecteurs par l'état de sophistication dont font preuve de nombreux mémoires « oubliés par l'histoire ».

Les travaux anciens consultables sous forme papier ou numérique sont totalement libres des contraintes spécifiques du « savoir marchand », et ne demandent qu'à être lus pour ouvrir et développer à nouveau leur champ de recherches.

L'exposé donnera quelques exemples de résurgence d'un savoir mathématique ouvert, à partir des oeuvres complètes de Sophus Lie, d'Élie Cartan, ...

Séminaire itinérant du Centre D'Alembert

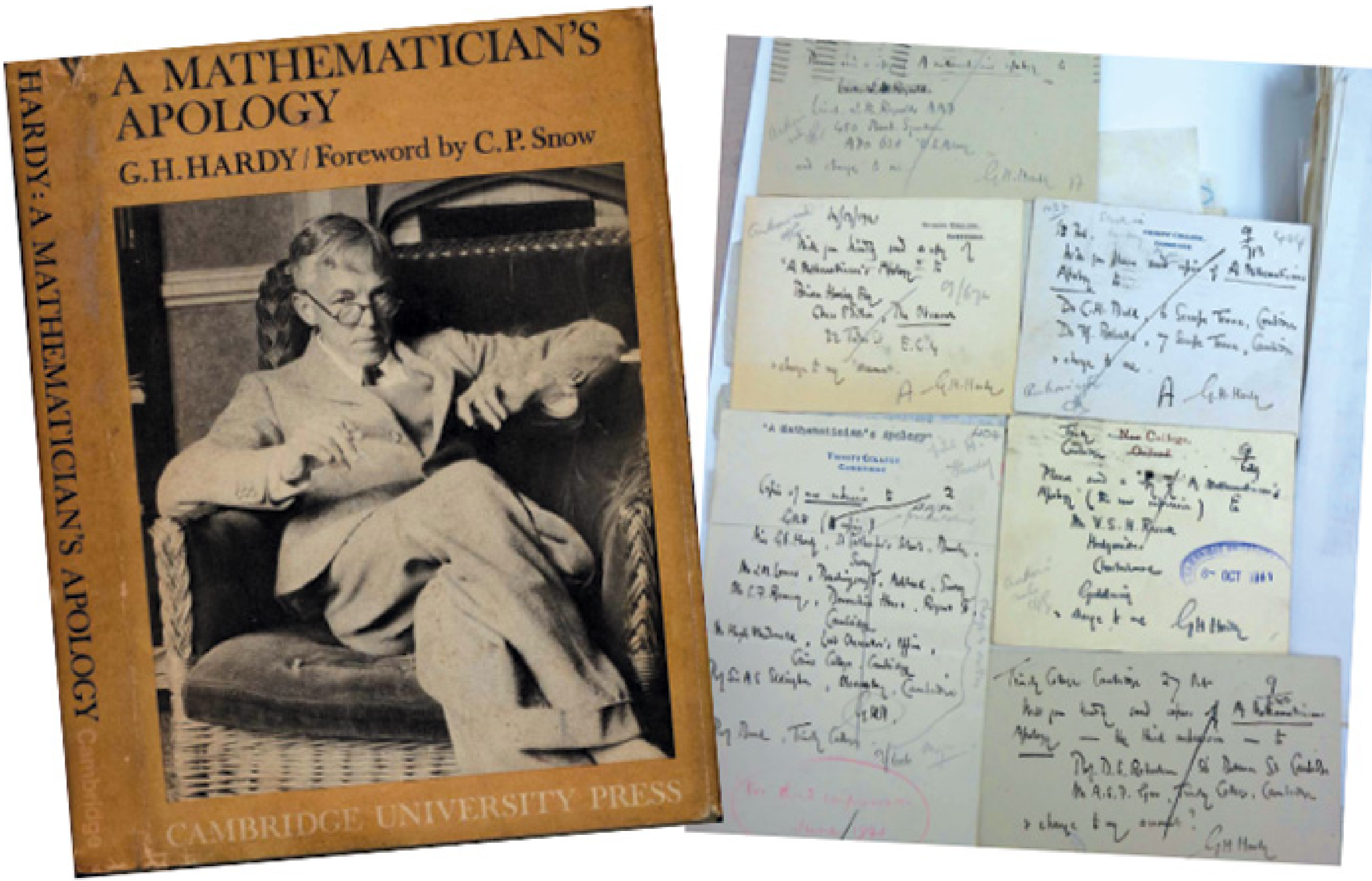
Thème 2022

Du patrimoine commun à la marchandisation de la connaissance : comment partager le savoir ? Une partie du monde académique met à disposition ses productions : conférences ouvertes, logiciels libres, données en libre accès, publications en accès libre. Parallèlement, le financement des recherches académiques par des entreprises, l'implication de celles-ci dans les formations universitaires, le dépôt de brevets, l'économie de l'édition et de la formation tendent à placer l'enseignement et la recherche dans une économie du savoir « marchande » avec des contraintes spécifiques. Le mélange de gratuité et de monétarisation, de partage et de marchandisation, d'altruisme et d'individualisme, est-il nécessaire au fonctionnement de la science actuelle ou pénalisant ? Quel modèle d'économie de la connaissance est le plus profitable à tous ? La science « ouverte » est-elle l'institutionnalisation du partage ou la mise à disposition à bas coûts des productions scientifiques pour le secteur marchand ? Comment les différentes communautés disciplinaires articulent-elles la production de biens communs et la valorisation de leurs découvertes ?

Prologue

Godfrey Harold Hardy (1877–1947) est un mathématicien britannique.

Il est connu pour ses travaux en théorie des nombres et en analyse.



Si vous êtes un scientifique dont les plumes ne sont pas encore ébouriffées, Hardy's principale affirmation perturbera sûrement votre plumage. Les « vraies » mathématiques, selon lui, est presque entièrement « inutile », alors que les mathématiques utiles sont « intolérablement ennuyeuses ».

Par « vraies » mathématiques, Hardy entendait les pures mathématiques qui ont tendance à être abstraites et générales et, selon Hardy, ont le plus de valeur esthétique.

S'y oppose l'essentiel des mathématiques vues à l'école : arithmétique, algèbre élémentaire, géométrie élémentaire, différentielle et intégrale calcul, mathématiques conçues pour le calcul et ayant le moins attrait esthétique.

Hardy était à la fois procureur et défenseur dans un procès imaginaire contre déterminer si sa vie en valait la peine :

> I have never done anything "useful". No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world . . .

[Je n’ai jamais rien fait « d’utile ». Aucune de mes découvertes n’a fait ou n’est susceptible de faire, directement ou indirectement, en bien ou en mal, la moindre différence à l’agrément du monde ...]

I have just one chance of escaping a verdict of complete triviality, that I may be judged to have created something worth creating.

[Je n’ai qu’une chance d’échapper à un verdict de pure trivialité, à savoir qu’on puisse juger que j’ai créé quelque chose qui vaut la peine d’être créé.]

Pour Hardy, qui a vécu deux guerres mondiales, la théorie des nombres a fourni une retraite qui était, heureusement, inutile aux militaires planificateurs. Hardy s’était opposé à l’entrée de l’Angleterre dans la première guerre mondiale, un conflit meurtrier aggravé par la science et la technologie.

A Mathematician’s Apology a été publié pour la première fois en 1940, lorsque l’Angleterre était de nouveau en guerre.

Empruntant à son propre article, *Les mathématiques en temps de guerre*, publié dans la revue *Eureka* en 1940, Hardy a écrit dans *Apology* la même année :

> When the world is mad, a mathematician may find in mathematics an incomparable anodyne. For mathematics is, of all the arts and sciences, the most austere and the most remote.

[Quand le monde est fou, un mathématicien peut trouver dans les mathématiques un tranquillisant incomparable. Car les mathématiques sont, de tous les arts et sciences, les plus austères et les plus lointaines.]

Selon Hardy, le monde du mathématicien est directement lié à réalité. ***Les théorèmes ne sont pas négociables.*** En revanche, dit-il, la réalité du scientifique n'est qu'un modèle.

> Une chaise peut être une collection d'électrons tourbillonnants, ou une idée dans l'esprit de Dieu.

> Chacun de ces récits peut avoir des mérites, mais ni l'un ni l'autre ne se conforme du tout étroitement à la suggestion du bon sens.

Le mathématicien pur n'a pas besoin d'être attaché (tethered) à la physique dans sa réalité. Selon les mots de Hardy :

> "Imaginary" universes are so much more beautiful than this stupidly constructed "real" one.

[Les univers « imaginaires » sont tellement plus beaux que ce monde « vrai » stupidement construit.]

Frederick Soddy, qui avait aidé le monde à comprendre la radioactivité, était dégoûté par de tels sentiments. Dans sa critique dans Nature, il a dit que si Hardy était pris au sérieux, alors le « vrai » mathématicien serait un « maniaque religieux ».

L'idée que les mathématiciens forment un sacerdoce auto-protégé avec leur propre religion était populaire. Elle s'exprime tout au long d'un livre de Hogben, *Mathematics for the Million*, un livre très réussi sur les mathématiques qui s'est bien vendu dans les années 1930.

Après avoir condamné Pythagore et Platon pour leur penchant excessif pour l'abstraction, Hogben a écrit :

> The fact that mathematicians are often like this may be why they are so inclined to keep the high mysteries of their Pythagorean brotherhood to themselves.

[Le fait que les mathématiciens soient souvent comme ça peut expliquer pourquoi ils sont si enclins à garder pour eux les grands mystères de leur confrérie pythagoricienne.]

Le trait qui éclairait le début d'une critique dans la revue Nature du lauréat du prix Nobel et chimiste Frederick Soddy était particulièrement perçant :

> This is a slight book. From such cloistral clowning the world sickens.

[C'est un petit livre. De tels clowns cloîtrés rendent le monde malade.]

Rapport parlementaire pour une science ouverte « réaliste »

N° 5154	**N° 573**
ASSEMBLÉE NATIONALE	**SÉNAT**
CONSTITUTION DU 4 OCTOBRE 1958 QUINZIÈME LÉGISLATURE	SESSION ORDINAIRE 2021-2022
Enregistré à la présidence de l'Assemblée nationale	Enregistré à la présidence du Sénat
le 10 mars 2022	le 9 mars 2022

RAPPORT

au nom de

L'OFFICE PARLEMENTAIRE D'ÉVALUATION DES CHOIX SCIENTIFIQUES ET TECHNOLOGIQUES

POUR UNE SCIENCE OUVERTE RÉALISTE, ÉQUILIBRÉE ET RESPECTUEUSE DE LA LIBERTÉ ACADÉMIQUE

SYNTHÈSE DES OBSERVATIONS

Depuis 30 ans, la **révolution numérique** bouleverse la diffusion des productions scientifiques, qui s'était longtemps appuyée sur la **publication d'articles dans des revues spécialisées**, dont le modèle économique reposait sur **l'abonnement des lecteurs**.

Dans ce contexte d'avancées technologiques puissantes, le projet d'une « science ouverte » promeut **l'idéal d'une diffusion large, immédiate et gratuite des publications mais également, plus récemment, des données de la recherche**. Une constellation d'initiatives privées et publiques a ainsi vu le jour depuis les années 1990 et accélère ce mouvement visant à rendre accessibles tous les travaux et articles de recherche, passés ou présents en utilisant des outils variés : archives ouvertes, *preprints*, épirevues, plateformes de diffusion, bibliothèques publiques… Les **institutions internationales, européennes et nationales, les universités et nos instituts de recherche** accompagnent ces évolutions et impulsent même certains changements. **Les résultats sont indéniables** et la recherche s'avère bien de plus en plus accessible

Mais ces évolutions appellent aussi une réflexion tant sur les **modèles économiques de l'édition scientifique** et la **place des éditeurs** que sur la question du **respect du pluralisme, de la liberté académique et des droit d'auteur** dont les chercheurs restent titulaires, laissant planer certaines incertitudes juridiques.

En mettant en péril l'équilibre économique de certains segments du monde de l'édition, elles pourraient porter atteinte à la **diversité de l'offre éditoriale tout particulièrement en sciences humaines et sociales** et conduire à une **prise en charge publique du coût des publications** (appelée modèle Diamant), le remède pouvant se révéler pire que le mal.

Elles réinterrogent notre rapport à **l'évaluation de la recherche**, à **l'intégrité scientifique** ou, encore, au **rôle du livre**, angle mort de la science ouverte, pourtant vital pour les sciences humaines et sociales.

Loin de ne constituer qu'une modalité d'organisation de l'accès à la recherche scientifique, la science ouverte est devenue **un mot d'ordre militant**, dont les opportunités mais aussi les risques doivent être bien pesés. À l'heure où elle tend à être instrumentalisée, tel un mantra incantatoire, pour **servir de boussole, voire de supplément d'âme**, à des institutions de l'enseignement supérieur en manque d'inspiration ainsi qu'à un monde de la recherche en perte de repères, il est urgent d'en **comprendre les enjeux et les implications** afin de garantir qu'elle permette un certain **pluralisme**, **essentiel pour notre culture et la vitalité de la démocratie**.

SYNTHÈSE DES PROPOSITIONS

La science ouverte ne doit **pas se faire n'importe comment ni à n'importe quel prix** : le pluralisme de l'expression scientifique et la diversité de ses canaux de diffusion doivent être préservés. La politique de la science ouverte et de l'édition scientifique qui est promue ici se veut **réaliste** car c'est une condition pour qu'elle soit effective, **équilibrée** car il faut tenir compte de la diversité des acteurs de la diffusion du savoir scientifique et **respectueuse de la liberté académique** car c'est d'abord en respectant l'autonomie des scientifiques que l'on défend la science. Elle nécessitera une **coordination interministérielle** plus poussée, la problématique dépassant le champ strict des attributions du ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, aujourd'hui seul à la barre. Le remaniement de cette politique publique visera le pluralisme et la bibliodiversité car l'ouverture de la science doit prendre plusieurs voies, le modèle Diamant ne saurait en être qu'une parmi d'autres. Il en ressort une série de huit propositions :

1. Définir et mettre en œuvre dans une logique réellement interministérielle, associant notamment les ministères chargés de l'enseignement supérieur, de la recherche et de la culture, une politique équilibrée et concertée de la science ouverte et de l'édition scientifique assurant un soutien aux petits éditeurs ;

2. Faciliter le dialogue entre toutes les parties prenantes et réformer l'Observatoire de l'édition scientifique en le rapprochant du Médiateur du livre et du Comité pour la science ouverte ;

3. Respecter la liberté académique, l'indépendance des chercheurs, la liberté de divulgation et le droit d'auteur ;

4. Favoriser la voie du pluralisme par la bibliodiversité plutôt que programmer l'hégémonie future du modèle Diamant ;

5. Mieux évaluer les effets de la politique de la science ouverte et conditionner toute mesure nouvelle à des études d'impact approfondies ;

6. Renforcer le rôle du Parlement en matière de science ouverte ;

7. Réviser les modalités d'évaluation des chercheurs, au profit de critères plus qualitatifs afin de réduire la pression à la publication ;

8. Prévoir des formations aux enjeux de la science ouverte dans tous les milieux de la recherche.

AVANT-PROPOS

Saisi par la commission de la culture du Sénat, l'Office parlementaire d'évaluation des choix scientifiques et technologiques a conduit à la fin de l'année 2021 et au tout début de l'année 2022 une étude sur la science ouverte qui s'inscrit dans la continuité de son précédent rapport intitulé « Promouvoir et protéger une culture partagée de l'intégrité scientifique »[1]. Ce travail montrait que **l'intégrité scientifique** impliquait de questionner l'ensemble de l'environnement de la recherche, et notamment le parcours de publication scientifique mais également les modalités d'évaluation des chercheurs et de leurs travaux[2].

Dans le contexte d'importantes pressions systémiques exercées sur le monde de la recherche et ses acteurs (bibliométrie, évaluation de la recherche, course à la publication…), la science ouverte, qui désigne selon le comité pour la science ouverte (CoSo) « la **diffusion sans entrave des publications et des données** de la recherche », doit permettre une meilleure **accessibilité** de la recherche, l'amélioration de la **transparence** et une plus grande **reproductibilité** des travaux.

Cette définition aux contours assez flous peut être entendue dans un **sens restreint ou élargi**. Selon les contextes et les spécialistes il s'agit de la science au sens strict de la recherche scientifique ou, dans un sens plus large, de toute information scientifique. Et les entraves qu'il conviendrait de lever peuvent être entendues comme des limites temporaires, ou techniques, ou économiques, ou juridiques, donnant à la science ouverte une ambition plus ou moins grande selon les conceptions.

Derrière les discours favorables à la science ouverte, devenue un **mot d'ordre militant** plus qu'une modalité d'organisation de l'accès à la recherche scientifique, le présent rapport entend dresser un **état des lieux sans concession** de la science ouverte, de ses enjeux et de ses formes diverses, pour en identifier les **opportunités** mais aussi les **risques** et ce afin de proposer quelques **pistes d'évolution**.

La dernière partie du rapport formule donc des préconisations pour une **politique de la science ouverte réaliste, équilibrée et respectueuse de la liberté académique**, avec la double préoccupation de se prononcer en faveur de la transparence, de l'ouverture et du partage des publications et des données mais aussi de proposer une voie concertée impliquant des

---

[1] *Cf. le rapport de Pierre Henriet, député, et Pierre Ouzoulias, sénateur, n° 428 (2020-2021) au Sénat et n° 3944 (15e législature) à l'Assemblée nationale : http://www.senat.fr/notice-rapport/2020/r20-428-notice.html sur le site du Sénat ou https://www.assemblee-nationale.fr/dyn/15/dossiers/integrite_scientifique sur celui de l'Assemblée nationale*

[2] *Certaines recommandations ont pu être intégrées à la loi de programmation de la recherche du 24 décembre 2020, avant même l'achèvement du rapport, ce qui constituait une première pour l'OPECST*

changements raisonnables pour le monde de l'édition, en particulier les petits éditeurs privés.

Cette *Realpolitik* de la science ouverte appelée de ses vœux par l'Office s'avère nécessaire à l'heure où cette dernière tend à être instrumentalisée, tel un mantra incantatoire, pour **servir de boussole, voire de supplément d'âme**, à des institutions de l'enseignement supérieur en manque d'inspiration ainsi qu'à un monde de la recherche en perte de repères.

Un rapport parlementaire consternant sur la Science ouverte

Frédéric Hélein

Ainsi la notion principale qui est dans le collimateur de ce rapport est le modèle diamant. Or on trouve dans le rapport des passages qui semblent montrer que leurs rédacteurs ne maîtrisent pas la définition même de ce qu'est le modèle diamant (voir plus bas) ! Cela pose un sérieux problème.

En effet la conclusion principale du rapport est que l'édition scientifique (et, avec, la liberté académique, etc.) serait menacée par l'hégémonie du modèle diamant.

Cette conclusion est totalement ridicule ! Tous les spécialistes de ces questions (qu'ils soient bibliothécaires, documentalistes ou chercheurs) savent que le modèle diamant n'est pas et ne sera jamais hégémonique. Il suffit de consulter le baromètre de la Science ouverte (fondé sur les publications d'auteurs travaillant en France) pour voir que la proportion d'articles en accès ouvert grâce au modèle diamant ne dépasse pas 9% et même tendance à baisser !

Le vrai problème est l'hégémonie des grands majors de l'édition scientifique (Elsevier, Springer Nature, etc.), que ce soit pour le modèle d'accès payant par abonnement ou pour l'accès ouvert financé par des APC (redevance de publication payés par l'auteur, ou plutôt, par leurs institutions) ou par des accords transformants (« read & publish »).

La cible de ce rapport serait un groupe de « militants » conspirant pour l'hégémonie du modèle diamant, au détriment de la bibliodiversité, ce qui est un comble car ce sont précisément ces mêmes « militants » qui sont à l'origine de l'Appel de Jussieu en faveur de la bibliodiversité !

Passons en revues quelques passages qui valent leur pesant de cacahuètes (liste non exhaustive) :

« La même communauté de hackers idéalistes travaille aussi à la diffusion gratuite et immédiate des données scientifiques, faisant fi du droit de la propriété intellectuelle. »

On est en pleine caricature !

« Cette violation du droit d'auteur à grande échelle constitue une menace pour les communautés scientifiques et pas que pour les éditeurs. »

Il est archi faux de prétendre que SciHub représente une « menace pour les communautés scientifiques », les études sur le sujet montre plutôt le contraire, à savoir, l'effet positif de SciHub sur la recherche.

« Il est heureux que la justice américaine en 2017 puis le tribunal de grande instance de Paris le 7 mars 2019 aient déclaré Sci-Hub illégal et ordonné aux grands fournisseurs d'accès à Internet de bloquer l'accès de leurs abonnés à Sci-Hub. »

C'est « heureux » du strict point de vue juridique et pour les actionnaires d'Elsevier & consorts, mais déplorable pour la Science en général et pour les scientifiques partout dans le monde pour lesquels SciHub est le seul accès aux ressources scientifiques.

Page 58, on trouve cette énorme confusion :

« Le modèle Diamant ou Diamond (variante « sponsorisée » de la voie dorée, le paiement est en amont mais il est pris en charge par les institutions publiques, agences de financement de la recherche, universités, laboratoires) ».

Les auteurs de ce rapport induisent une confusion entre le modèle diamant et le modèle décrit entre parenthèse, qui correspond plutôt au modèle « read & publish » ou aux accords transformants ! Une telle confusion est d'autant plus grave que le modèle diamant est présenté comme le grand péril qui menace la Science.

Page 58 :

« Le modèle Diamant semble à première vue séduisant et est défendu par les acteurs de la science ouverte de manière assez unanime, son hégémonie future doit être cependant bien pesée car le remède pourrait se révéler pire que le mal. »

Il n'y aura jamais d'hégémonie de ce modèle ! le modèle hégémonique a été et est malheureusement toujours et pour longtemps celui des gros éditeurs commerciaux, avec des bouquets d'abonnement. Et le risque majeur est que le modèle hégémonique devienne celui des paiements d'APC, soit sous forme individuelle, soit dans le cadre d'accords globaux très coûteux et qui lieront pieds et poings les chercheurs et leurs institutions au bon vouloir des grandes majors de l'édition scientifique.

« Outre qu'il ferait des éditeurs des acteurs économiques assistés, voire des rentiers, il pose le problème fondamental de la dépendance accrue des chercheurs à l'égard de l'État. »

> Beaucoup d'éditeurs scientifiques sont d'ores et déjà plus ou moins soit des « assistés » (s'il faut employer ce terme élégant), soit des « rentiers ». Par exemple l'édition scientifique française bénéficie du travail éditorial gratuit des chercheurs payés par les institutions, de plans de soutien et vivent des abonnements des universités. Car, quel que soit le modèle, pour les petits éditeurs, les éditeurs académiques, privés ou institutionnels, il est impossible de vivre sans le soutien constant des finances publiques. Quant aux « rentiers », on les connaît, ce sont les grosses majors (Elsevier, Springer Nature, . . .).

« Il faudra, plus généralement, une coordination des acteurs et de la politique de la science ouverte et de l'édition, ces deux univers s'ignorant de manière préjudiciable. »

« Cette réalisation louable est un peu l'arbre qui cache la forêt : la politique de la science ouverte et de l'édition n'est pas coordonnée et, pire, il n'y a pas de politique de la science ouverte et de l'édition, une certaine science ouverte militante avançant en percevant l'édition privée comme une simple future victime collatérale de son avènement prochain. »

Plus de « coordination » ? c'est possible, mais il faut arrêter de crier au complot des « militants ». La balle est aussi dans le camp des éditeurs commerciaux. Certains, comme EDP Sciences, ne se contentent pas de jouer les victimes tout en profitant des subsides publics régulièrement, mais font l'effort de chercher des modèles économiques vertueux pour développer l'accès libre (par exemple, le modèle Subscribe to Open) en collaborant avec les acteurs français de la Science ouverte.

(À ce sujet, il faut souligner qu'EDP Sciences, publiant majoritairement en Sciences exactes, est beaucoup plus exposé à la concurrence internationale féroce des grosses majors que les éditeurs en SHS publiant en langue française.)

Par ailleurs, il y a bien une politique de Science ouverte en France, citée en exemple à l'étranger.

Page 79, cette énormité :

« L'obsolescence rapide d'un article de physique ou de mathématique ne vaut pas pour une étude historique, sociologique ou archéologique. »

Pour une mathématicienne ou un mathématicien (à commencer par le Président de l'OPECST !), inutile de commenter, elles ou ils auront sauté au plafond en lisant une telle ânerie. Pour les rédacteurs de ce rapport, sachez que vous pouvez lire les Éléments d'Euclide, rédigé il y a 2300 ans, et que cet ouvrage n'a pas pris une ride ! (il y a bien sûr bien une multitude de textes mathématiques anciens non obsolètes, en réalité aucun bon texte en mathématiques n'est obsolète !). La même remarque s'applique à de larges pans de la physique, sinon toute la physique.

Page 89 :

« 4. *Favoriser la voie du pluralisme par la bibliodiversité plutôt que programmer l'hégémonie future du modèle Diamant*

Il est recommandé d'abandonner la perspective d'une voie unique, bientôt potentiellement hégémonique, poussant à l'uniformisation et à la généralisation d'un seul modèle, synonyme d'étatisation de l'édition scientifique, et de veiller plutôt à une bibliodiversité effective et ambitieuse. »

→ personne parmi les affreux « *militants* » désignés ne travaille pour un modèle unique, c'est tout l'inverse ! faut-il rappeler que la mise en avant du concept même de *bibliodiversité* est l'œuvre de cette communauté ?

« *Les livres, les revues et les plateformes payants n'ont pas vocation à disparaître et l'on ne doit pas se résoudre au scénario de la* ***domination programmée du modèle Diamant 4***. »

→ **Stop !** personne n'a programmé la domination du modèle Diamant ! cette histoire de « grand remplacement » de l'édition commerciale par le modèle diamant est un pur délire ! (voir les commentaires au début de ce billet.)

Cabinets de consultance : l'État au service et sous le contrôle du privé

https ://rogueesr.fr/

RogueESR est un collectif créé en 2017 pour promouvoir une université et une recherche libres, exigeantes et placées au service de l'intérêt général et de l'émancipation, a contrario de la politique menée par le gouvernement actuel.

« Rogue » implique la révolte ; ce qualificatif fut notamment adopté aux États-Unis par des personnels des agences fédérales scientifiques (NASA, EPA, NOAA, etc.) en résistance aux politiques de Trump, à l'occasion de la « march for science ».

Originaires de toutes les régions, nous travaillons dans l'enseignement supérieur et la recherche (ESR), dans des disciplines variées et avec des statuts différents. Nous ne représentons pas les institutions de l'ESR, mais nous espérons rassembler celles et ceux qui les font vivre au quotidien.

Le 16 mars 2022, un rapport sénatorial paraît, qui porte sur le recours croissant à des cabinets de consultance par l'État :

https ://www.senat.fr/rap/r21-578-1/r21-578-11.pdf

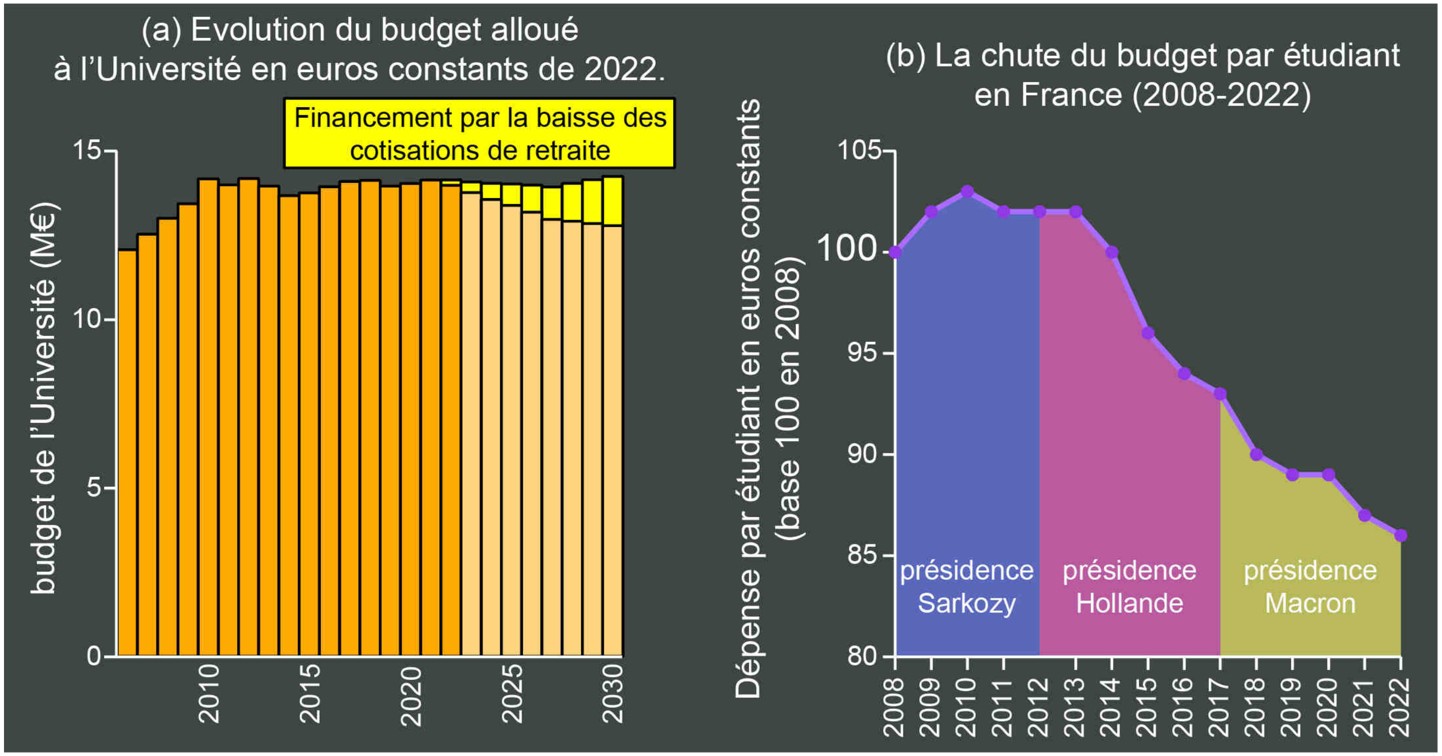
Le 21 novembre 2019, la Caisse nationale d'assurance vieillesse commande au cabinet McKinsey une prestation de conseil : comment aligner le régime des retraites de la fonction publique sur celui du secteur privé, de sorte à diminuer les cotisations de pension de retraite des fonctionnaires ? Pour le tarif global de 920 000 €, soit 2 700 € par jour, les consultants de McKinsey établissent ce qu'il faut bien appeler un programme de mise en crise du régime de retraites, pour l'heure à l'équilibre pour deux décennies. Le résultat concret de cette commande, un « livrable » de 50 pages accompagné d'un « power-point », occulte volontairement la participation du cabinet.

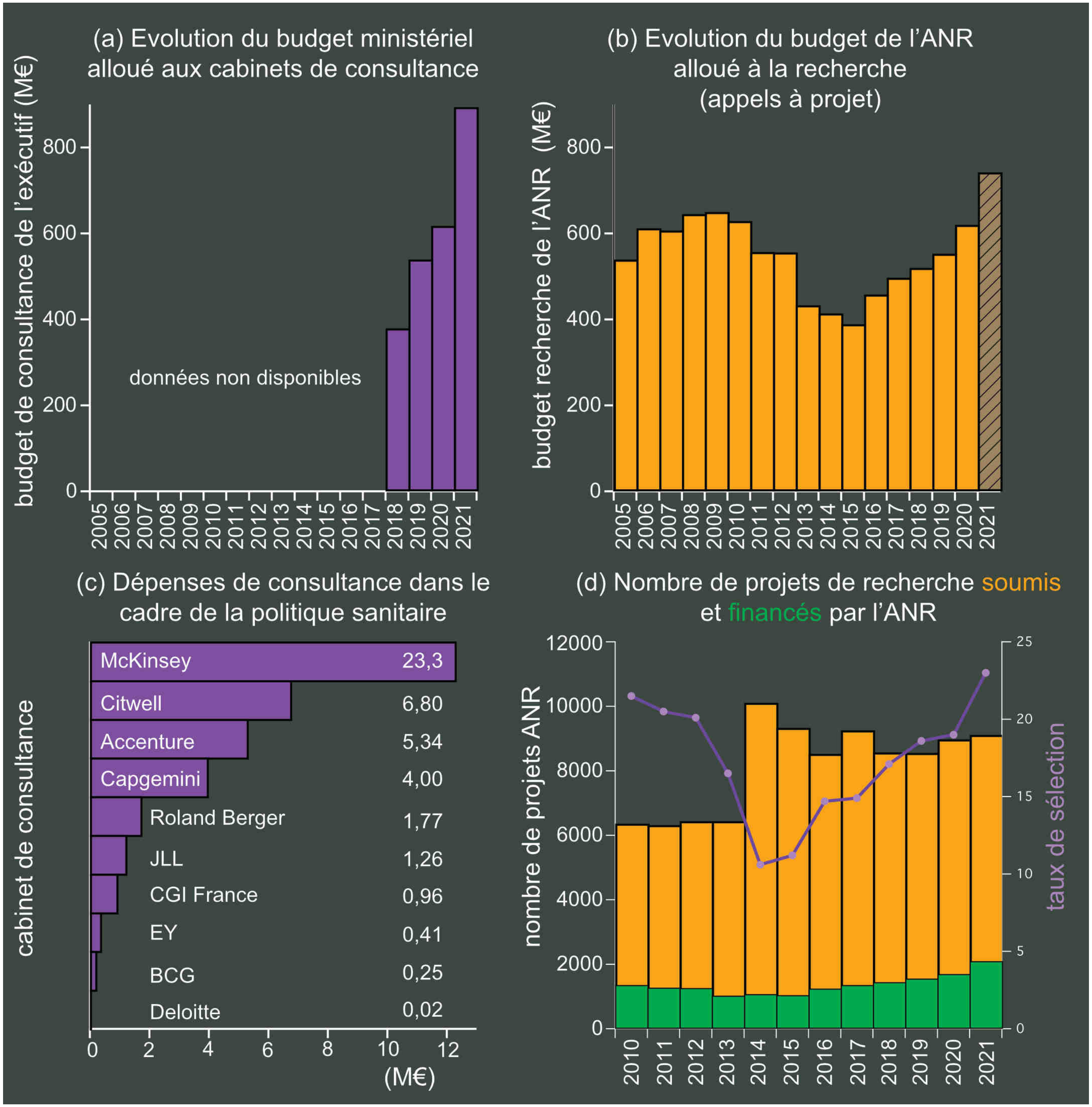
Le 1er janvier 2020, la direction interministérielle de la transformation publique (DITP) commande au cabinet McKinsey un rapport sur l'évolution du métier d'enseignant, monnayé 496 800 euros, soit 3 312 euros par jour. Un an après, à l'issue d'un pseudo-colloque sur le sujet, un rapport indigent paraît effectivement, mais il est signé de Yann Algan, Stanislas Dehaene, Élise Huillery, Elena Pasquinelli et Franck Ramus, de nouveau sans aucune mention de McKinsey. Cette manifestation est caractéristique des événements en « zone grise » qui usent et abusent du prestige académique à des fins idéologiques ou économiques. Le 25 février 2020, le ministère de l'Éducation nationale écrit au directeur associé du cabinet de conseil McKinsey, lui demandant de reporter le « copil McKinsey » du lendemain pour que le ministre, Jean-Michel Blanquer, « puisse y participer, car tel est son souhait ». « N'appelons pas cette instance "copil McKinsey" mais "copil DITP Enseignant XXI". C'est important que cela apparaisse dans les agendas. », rectifie le consultant par retour de courrier.

Le recours aux cabinets de consultance entretient un lien systémique avec la sape des normes d'intégrité scientifique et d'autonomie intellectuelle que vivent la recherche et l'Université depuis vingt ans.

Une suite ininterrompue d'excellents appels à projets qui ont conduit les appareils universitaires à dilapider l'argent public en faisant appel à d'excellents cabinets de consultance pour écrire de non moins excellents dossiers de candidature. Le cabinet Kurt Salmon Associates eut le marché pour la Comue Université Bretagne Loire, le cabinet Charles Riley Digital Focus pour Sorbonne Université, Ineum, Erdyn et Alcimed pour le pôle de recherche et d'enseignement supérieur (PRES) de l'Université de Bordeaux, Bearing Point France et Ernst & Young pour le PRES Université Paris Est, Deloitte pour la fusion de l'Université de Strasbourg, Ineum Consulting pour l'IdEx Sorbonne Paris Cité et Alcimed pour la Société d'Accélération du Transfert de Technologies (SATT) qui lui fut adossée — le recrutement du PDG de la SATT fut, lui, opéré par François Sanchez Consultant. Les 17 candidatures aux IdEx ont ainsi été facturées autour de 400 000 euros par dossier dépourvu de sens.

On sait moins, en revanche, que les cabinets de consultance avaient parallèlement été mis à contribution pour concevoir les excellents appels à projets, auxquels ils rédigeaient ensuite leurs excellentes réponses, contre espèces sonnantes et trébuchantes. Par ailleurs, la plupart des bureaucraties universitaires ont désormais recours pour définir les « stratégies d'établissements » à des cabinets de consultance comme Siris Academics, connus pour avoir des contrats avec le ministère. Ces cabinets privés sont utilisés pour « faire passer des messages » et négocier des ajustements entre les établissements et le ministère. Les navettes ministérielles n'ont donc pas disparu avec la pseudo-autonomie des établissements : elles ont tout simplement été privatisées.


(a) Evolution du budget alloué
à l'Université en euros constants de 2022.
Financement par la baisse des cotisations de retraite
budget de l'Université (M€)
15
10
5
0
2010
2015
2020
2025
2030
(b) La chute du budget par étudiant
en France (2008-2022)
Dépense par étudiant en euros constants
(base 100 en 2008)
105
100
95
90
85
80
présidence Sarkozy
présidence Hollande
présidence Macron
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022


(a) Evolution du budget ministériel alloué aux cabinets de consultance
budget de consultance de l'exécutif (M€)
données non disponibles
(b) Evolution du budget de l'ANR alloué à la recherche (appels à projet)
budget recherche de l'ANR (M€)
(c) Dépenses de consultance dans le cadre de la politique sanitaire
cabinet de consultance
McKinsey 23,3
Citwell 6,80
Accenture 5,34
Capgemini 4,00
Roland Berger 1,77
JLL 1,26
CGI France 0,96
EY 0,41
BCG 0,25
Deloitte 0,02
(M€)
(d) Nombre de projets de recherche soumis et financés par l'ANR
nombre de projets ANR
taux de sélection

En conclusion, il convient de circonscrire les raisons pour lesquelles ce recours aux cabinets de consultance est à ce point choquant pour le monde de l'Université et de la recherche. Il y a d'abord la médiocrité des travaux effectués, sans commune mesure avec les normes en vigueur dans la recherche. C'est particulièrement vrai pour des questions comme la pandémie de COVID-19 ou l'évolution du métier d'enseignant, pour lesquels écrire un rapport suppose de pouvoir établir une bibliographie scientifique, donc d'être formé à la recherche plutôt qu'au management et à la communication. Par ailleurs, le financement de ce type de travail de recherche aurait été incomparablement plus faible que les ponctions d'argent public opérées par les cabinets. Comment ne pas voir (figure 2) que le montant dépensé en rapports indigents par l'exécutif croit beaucoup plus vite que le montant que l'Agence nationale de la recherche consacre aux projets de recherche publique ?

Tribune d'un collectif anonyme de magistrats

McKinsey : nous, magistrats, trouvons anormal que le parquet ne déclenche pas d'enquête.

L'ombre d'un scandale d'État.

Ces faits concernent tout un système susceptible de mettre en cause les plus hautes instances de l'État : les ministres placés à la direction d'administrations centrales, ordonnateurs des deniers publics ayant engagé des dépenses au nom de l'État, et selon des procédures de marchés publics dont il appartient à la justice d'en vérifier la régularité.

Il serait anormal que le parquet ne déclenche pas une enquête et des investigations sur ce qui pourrait être un véritable scandale d'État.

Fraude fiscale, détournements de fonds, conflit d'intérêts . . .

La réalité des prestations effectuées par le cabinet (cette question se pose très sérieusement concernant les 950 000 euros versés pour les États généraux de la justice). En effet, le rapport indique que si les ministères ont du mal à indiquer quelles sont les actions demandées aux cabinets de conseil, c'est aussi car les salariés de ces entreprises privées travaillent parfois directement dans les administrations, auprès des fonctionnaires.

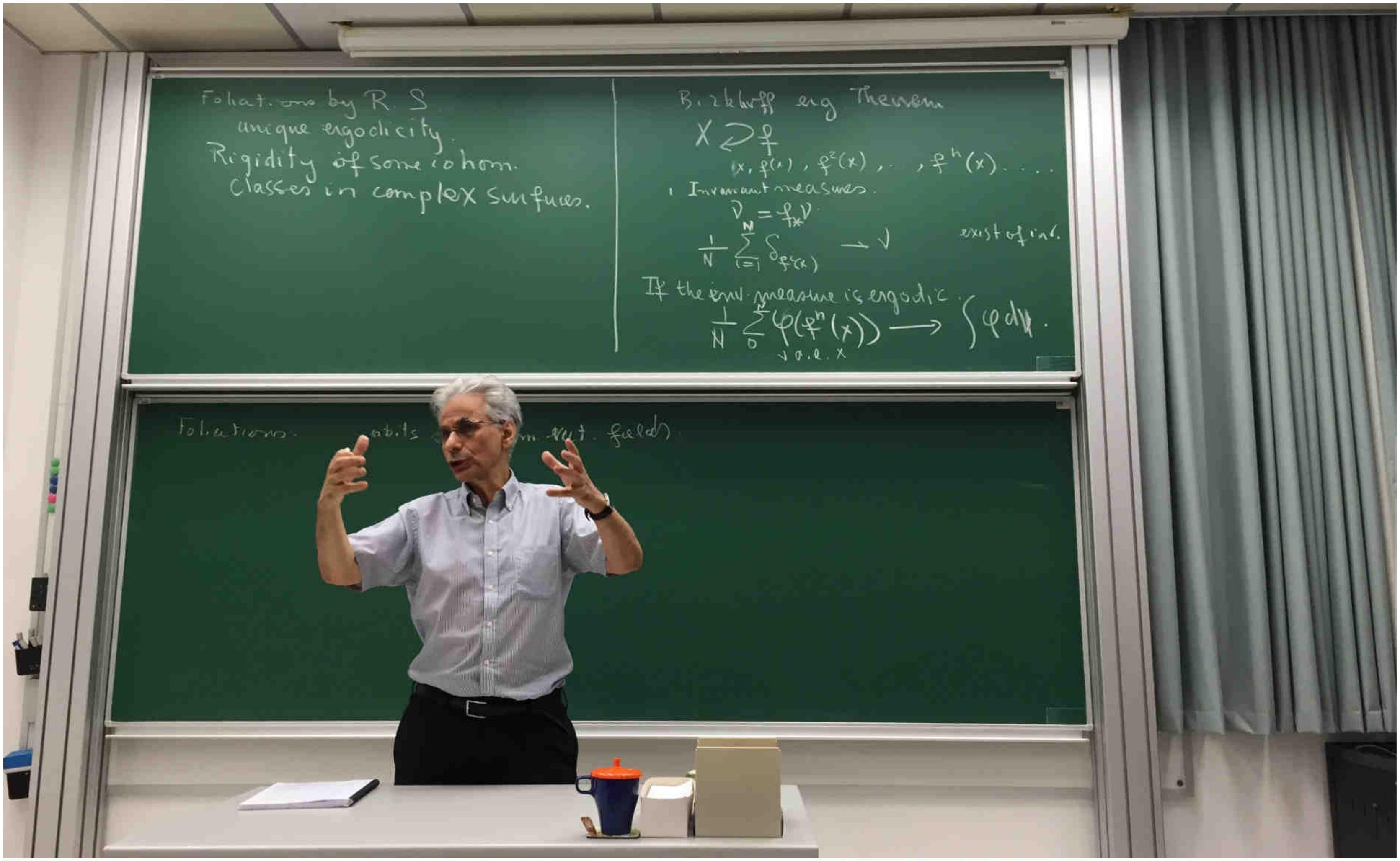
« Si vous aviez voulu [les documents] estampillés par McKinsey présents dans le dossier, vous auriez eu une feuille blanche ».

En effet, au cours de la crise sanitaire, des consultants ont pu écrire des notes administratives, non sous le sceau de leur cabinet, mais sous celui du ministère des Solidarités et de la Santé. Un tel niveau de confusion des genres ne peut qu'interroger. Et si les prestations facturées correspondent à des travaux fictifs non justifiés, il convient de s'interroger si ces paiements correspondent à un remboursement, une contrepartie (par exemple : un remboursement de dons versés pour une campagne électorale). Ces faits sont susceptibles de qualifications pénales : détournements de fonds publics, corruption passive, active, la liste n'étant pas exhaustive en la matière...

Ne pas devenir une République bananière

La justice ne saurait être complice de ces dévoiements, il en va de la survie de notre État de droit si nous ne voulons pas devenir une république bananière.

Nessim Sibony, in Memoriam



Nessim Sibony soutient sa thèse à Orsay en 1974 sous la direction de Gustave Choquet. Il devient assistant à Orsay, puis professeur à Orsay en 1981, dans l'équipe d'Analyse Harmonique.

De: "Elisabeth Kneller" <elisabeth.kneller@universit
À: "joel merker" <joel.merker@universite-paris-sacla
Envoyé: Mercredi 9 Mars 2022 21:09:19
Objet: Thèse de N. Sibony

Bonsoir Joël,

J'ai demandé la thèse de Nessim Sibony auprès de la BU et je l'ai scannée. Vous pouvez la télécharger à l'adresse

https://filesender.renater.fr/?s=download&token=0695

Jean-Michel Bismut m'a aussi contactée et je lui ai envoyé la thèse aussi.

Bien amicalement

Elisabeth

Centre d'Orsay

THESES

présentées pour obtenir le grade de docteur ès-sciences mathématiques

par

Nessim SIBONY

1ère thèse : Problèmes de prolongement analytique et d'approximation polynômiale pondérée.

2ème thèse : propositions données

soutenues le devant la commission d'examen

MM. H. Cartan, Président
G. Choquet
A. Douady
J.-P. Ferrier
V. Poenaru

Nessim Sibony consacre sa vie de mathématicien à l'analyse complexe sous toutes ses formes, et particulièrement à la dynamique holomorphe en dimension supérieure, aux méthodes dynamiques d'étude des feuilletages holomorphes, et donne une impulsion essentielle au développement de la théorie des courants positifs, et des pluripotentiels associés.

Désolé d'entendre des résultats bien connus présentés comme nouveaux, Nessim Sibony s'interrogeait aussi sur les mathématiques, « une activité de fou ».

Le point de vue de Nessim sur les mathématiques était vaste : s'il était d'abord un analyste radical, il était capable de s'intéresser directement aux avancées de la géométrie complexe, et aux travaux des arithméticiens sur les questions d'équidistribution.

Son attitude vis à vis des mathématiques comme sur le reste était d'une passion sans limite, sans indulgence d'abord pour lui-même, et comme par rebond, pour les autres également. J'avais vainement tenté de l'enrôler comme coorganisateur du séminaire d'analyse géométrique que nous organisions à Orsay, ce qu'il avait au fond refusé. Mais il y venait très régulièrement.

Il s'installait au fond de la salle, posait quelques questions rapides et brèves, et passait me voir dans mon bureau pour me faire savoir, de manière souvent vigoureuse, ce qu'il avait pensé de l'exposé.

Nessim Sibony avait volontiers le tour philosophique, ce qui lui permettait d'être à la fois actif, et comme en retrait.

Ayant accédé, par son éducation, aux sources multiples de sagesses contradictoires, il se refusait aux certitudes faciles qu'elles créent chez leurs adeptes.

« Un artisan » disait-il plutôt, « dissimulant dans les énoncés de ses théorèmes ce que les outils de son atelier peuvent réellement atteindre ». Lucidité frappante... concernant la réflexivité intrinsèque du discours mathématique !

« On écrit des mathématiques pour les oublier ! », m'a-t-il une fois lancé, ce qui, au-delà du paradoxe, me plongea dans une très grande perplexité.

Souvent, Nessim répétait que « les applications Cauchy-Riemann entre variétés Cauchy-Riemann sont inintéressantes », car, disait-il, « la plupart du temps, elles n'existent pas ! ».

Tout est-il sur internet ?

- **Google versus Focus ?**

- **Thèse non publiée de Marc Wermann :**

De : "Elisabeth Kneller" <elisabeth.kneller@universite-paris-saclay.fr>
À : "joel merker" <joel.merker@math.u-psud.fr>
Cc : "franck pierron" <franck.pierron@universite-paris-saclay.fr>, "Elisabeth Kneller" <elisabeth.kneller@universite-paris-saclay.fr>
Envoyé : Mercredi 7 Octobre 2020 19 :17 :33
Objet : Re : Demande en tant que lecteur

Bonsoir Joël,

J'ai demandé au service PEB de faire venir la thèse. Elle devrait être disponible à Dortmund ou à la bibliothèque nationale allemande (Frankfurt ou Leipzig).

Bien amicalement

Elisabeth

1. Gutachter :	Prof. Dr. R. Walter
2. Gutachter :	Prof. Dr. H. Frank
Vorsitzender :	Prof. Dr. St. Turek

Tag der mündlichen Prüfung :	30. Oktober 2001

Berichte aus der Mathematik

Marc Wermann

Homogene Hyperflächen im vierdimensionalen äqui-affinen Raum

D 290 (Diss. Universität Dortmund)

Shaker Verlag
Aachen 2001

$$\boxed{E = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad F = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & 0 & & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad H = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & & & & 0 \\ & 2 & & & 0 \\ & & -4 & & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right)}$$

mit

(II.9) $$\boxed{\delta = 768x_3^3\,(x_2 - x_1x_4)} \ .$$

Fall 1.1.2.2 : $c = \frac{1}{2}$
Hier folgt aus obigen Gleichungen

$$f_{43} = 0 \qquad\qquad f_{t4} = -f_{23}f_{t3} \ .$$

Transformation vermöge

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & & 0 & & 0 \\ \frac{h_{23}f_{t3}}{e_{t4}} & 1 & \frac{2}{9}h_{23} & 0 & -\frac{2}{9}h_{23}h_{t3} + \frac{2}{3}h_{t2} \\ \cline{1-4} \frac{f_{t3}}{e_{t4}} & & 1 & & -\frac{1}{3}h_{t3} \\ -\frac{f_{23}f_{t3}}{e_{t4}} & 0 & -f_{23} & 1 & h_{t4} + \frac{4}{3}f_{23}h_{t3} \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right)$$

liefert nach Umbenennung $a := e_{t4},\ b := f_{41}$ die Erzeugenden

$$E = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & a \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad F = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & 0 & & a \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ b & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad H = \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & & & & 0 \\ & -\frac{3}{2} & & & 0 \\ & & 3 & & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right)$$

mit $\delta = -\frac{243}{4}a^6x_3^3\,(3x_2a^2 - 3ax_1x_4 + bx_1^3)$. Zunächst folgt $a \neq 0$ aus der Regularität und es wird bzgl. b weiter unterschieden

Fall 1.1.2.2.1 : $b \neq 0$
Der hier vorliegende Fall ist vermöge

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{a^2b}, 0, 0\right) \qquad (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(0, \frac{1}{ab}, 0\right) \qquad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (0, 0, 1)$$

und $T = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a^2b^2}, a^3b^4, \frac{1}{ab}, 1\right)$ ähnlich zum speziell für $a = b = 1$ entstehenden Fall, d.h. zu

$$E = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad F = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & 0 & & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad H = \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & & & & 0 \\ & -\frac{3}{2} & & & 0 \\ & & 3 & & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) .$$

Der nun vorliegende Fall ist allerdings ähnlich zum schon bekannten Typ (II.2) vermög

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0) \qquad (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, 0, 0) \qquad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (0, 0, 2)$$

und

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cline{1-4} & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right) .$$

Fall 1.1.2.2.2 : $b = 0$
Der hier vorliegende Fall ist vermöge

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0, 0) \qquad (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(0, \frac{1}{a^2}, 0\right) \qquad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (0, 0, 1)$$

und $T = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, a, a, 1\right)$ ähnlich zum speziell für $a = 1,\ b = 0$ entstehenden Fall, d.h

$$\boxed{E = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad F = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & 0 & & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad H = \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & & & & 0 \\ & -\frac{3}{2} & & & 0 \\ & & 3 & & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right)}$$

mit

(II.10) $$\boxed{\delta = -\tfrac{729}{4}x_3^3\,(x_2 - x_1x_4)} \ .$$

Fall 1.1.2.3 : $c = -1$
Hier folgt aus obigen Gleichungen

$$f_{43} = f_{41} = 0$$
$$f_{t4} = -f_{23}f_{t3} \ .$$

Transformation vermöge

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & & 0 & & 0 \\ \frac{h_{23}f_{t3}}{e_{t4}} & 1 & T_{23} & 0 & 0 \\ \cline{1-4} \frac{f_{t3}}{e_{t4}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{f_{23}f_{t3}}{e_{t4}} & 0 & -f_{23} & 1 & f_{23}h_{t3} + h_{t4} \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right)$$

mit $T_{23} = \frac{h_{t2}}{h_{t3}}$, was aufgrund der Regularität definiert ist, liefert nach Umbenennung $a :=$
$b := h_{23},\ c := h_{t3}$ die Erzeugenden

$$E = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & a \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad F = \left(\begin{array}{cc|cc|c} & & 0 & & a \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right) \quad H = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & & c \\ & & 0 & -1 & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right)$$

- **Thèse de Wünschmann :**

Wünschmann, K. : *Uber Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen*, Inaug. Dissert. (Leipzig : Teubner), 1905.

Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications SIGMA **16** (2020), 056, 16 pages

New Explicit Lorentzian Einstein–Weyl Structures in 3-Dimensions

Joël MERKER † *and Paweł NUROWSKI* ‡

† *Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France*
E-mail: *joel.merker@universite-paris-saclay.fr*
URL: http://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~merker/

‡ *Centrum Fizyki Teoretycznej, Polska Akademia Nauk, Al. Lotników 32/46, 02-668 Warszawa, Poland*
E-mail: *nurowski@cft.edu.pl*
URL: http://www.fuw.edu.pl/~nurowski/

Received March 30, 2020, in final form June 08, 2020; Published online June 17, 2020
https://doi.org/10.3842/SIGMA.2020.056

Abstract. On a 3D manifold, a *Weyl geometry* consists of pairs $(g, A) =$ (metric, 1-form) modulo gauge $\widehat{g} = e^{2\varphi} g$, $\widehat{A} = A + d\varphi$. In 1943, Cartan showed that every solution to the Einstein–Weyl equations $R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3} R g_{\mu\nu} = 0$ comes from an appropriate 3D leaf space quotient of a 7D connection bundle associated with a 3rd order ODE $y''' = H(x, y, y', y'')$ modulo point transformations, provided 2 among 3 primary point invariants vanish

$$\mathsf{Wünschmann}(H) \equiv 0 \equiv \mathsf{Cartan}(H).$$

We find that point equivalence of a single PDE $z_y = F(x, y, z, z_x)$ with para-CR integrability $DF := F_x + z_x F_z \equiv 0$ leads to a *completely similar* 7D Cartan bundle and connection. Then magically, the (complicated) equation $\mathsf{Wünschmann}(H) \equiv 0$ becomes

$$0 \equiv \mathsf{Monge}(F) := 9F_{pp}^2 F_{ppppp} - 45 F_{pp} F_{ppp} F_{pppp} + 40 F_{ppp}^3, \qquad p := z_x,$$

whose solutions are just conics in the $\{p, F\}$-plane. As an ansatz, we take

$$F(x, y, z, p) := \frac{\alpha(y)(z - xp)^2 + \beta(y)(z - xp)p + \gamma(y)(z - xp) + \delta(y)p^2 + \varepsilon(y)p + \zeta(y)}{\lambda(y)(z - xp) + \mu(y)p + \nu(y)},$$

with 9 arbitrary functions $\alpha, \ldots, \nu$ of y. This F satisfies $DF \equiv 0 \equiv \mathsf{Monge}(F)$, and we show that the condition $\mathsf{Cartan}(H) \equiv 0$ passes to a certain $\boldsymbol{K}(F) \equiv 0$ which holds for any choice of $\alpha(y), \ldots, \nu(y)$. Descending to the leaf space quotient, we gain ∞-dimensional *functionally parametrized and explicit* families of Einstein–Weyl structures $\big[(g, A)\big]$ in 3D. These structures are nontrivial in the sense that $dA \not\equiv 0$ and $\mathsf{Cotton}([g]) \not\equiv 0$.

Key words: Einstein–Weyl structures; Lorentzian metrics; para-CR structures; third-order ordinary differential equations; Monge invariant; Wünschmann invariant; Cartan's method of equivalence; exterior differential systems

But from the ODE side unfortunately, it is quite difficult to solve Wünschmann's nonlinear equation incorporating 25 differential monomials

$$\begin{aligned} 0 \equiv \boldsymbol{W}(H) := & -18qH_qH_{pq} + 9pH_yH_{qq} + 18qHH_{pqq} + 9qH_pH_{qq} - 18pH_qH_{yq} + 18pHH_{yqq} \\ & - 9HH_qH_{qq} + 18pqH_{ypq} + 18pH_{xyq} + 18qH_{xpq} + 9H_xH_{qq} + 18HH_{xqq} \\ & - 18H_qH_{xq} + 18H_pH_q + 9H_{xxq} - 27H_{xp} + 4H_q^3 + 9p^2H_{yyq} - 27pH_{yp} \\ & + 9qH_{yq} + 9q^2H_{ppq} - 27qH_{pp} - 18HH_{pq} + 9H^2H_{qqq} + 54H_y. \end{aligned}$$

This inspired us to try to work on the PDE side $z_y = F(x, y, z, z_x)$, instead of the ODE side. Then *magically*, $\boldsymbol{W}(H) \equiv 0$ transforms into the much simpler classical invariant of Monge [16]

$$0 \equiv \mathsf{Monge}(F) := 9F_{pp}^2F_{ppppp} - 45F_{pp}F_{ppp}F_{pppp} + 40F_{ppp}^3,$$

Fin de la Table.

DE L'IMPRIMERIE DE P. GUEFFIER.

CORRESPONDANCE
SUR
L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

N^o. II. *Janvier* 1810. (2^e. vol.)

§. I^{er}.

ANALYSE

Sur les Équations différentielles des Courbes du second degré;

Par M. MONGE.

L'équation aux différences premières ordinaires à la ligne droite est toujours de la forme $\left(\textit{faisant } \frac{dy}{dx} = p.\right)$

$$F(y - px, p) = 0$$

et son intégrale se trouve en mettant dans cette équation la constante arbitraire a à la place de p, c'est-à-dire que l'intégrale complète est

$$F(y - ax, a) = 0.$$

Ce seroit, je pense, une entreprise inutile de chercher de semblables résultats pour les courbes des différens degrés, principalement parce qu'à l'inspection d'une équation différentielle on ne peut reconnoître si elle appartient à une courbe algébrique, ni de quel degré est cette courbe. Mais les courbes du second degré sont si simples, et se présentent si fréquemment dans la nature, qu'il peut être de quelqu'utilité de le faire pour elles.

L'équation générale des courbes du second ordre est de la forme

$$(A) \quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0$$

et contient les cinq constantes A, B, C, D, E. Si l'on différencie cette équation cinq fois consécutives, pour arriver aux différences du cinquième ordre, on aura cinq nouvelles équations, entre lesquelles et (A), on peut éliminer les cinq constantes considérées comme arbitraires. Et en faisant.

$$\frac{dy}{dx}=p, \quad \frac{dp}{dx}=q, \quad \frac{dq}{dx}=r, \quad \frac{dr}{dx}=s, \quad \frac{ds}{dx}=t,$$

on trouve pour équation générale, délivrée de toutes les constantes :

$$(B) \qquad 9q^2 t - 45 qrs + 40 r^3 = 0;$$

c'est cette équation qui appartient à toutes les courbes du second degré, et qui les exprime toutes, quelles que puissent être les cinq constantes.

Cela posé, soit proposée une équation aux différences ordinaires, qui n'excède pas le quatrième ordre : il est facile de reconnoître si elle appartient à une courbe du deuxième degré : pour cela, il suffit de la différencier successivement jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux cinquièmes différences, et de s'assurer si la proposée, au moyen de ses différentielles, satisfait à l'équation générale (B). Si cela a lieu, la proposée appartient en effet à une courbe du second degré, et son intégrale complète est l'équation (A) dans laquelle il y a autant de constantes de trop qu'il a fallu différencier de fois pour arriver aux cinquièmes différences ; il faut donc déterminer les constantes surnuméraires pour que l'intégrale ne soit plus l'équation de toutes les sections coniques, mais seulement celle des sections coniques auxquelles appartient la proposée.

Pour cela, il faut différencier l'intégrale (A) plusieurs fois successivement, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'ordre de la proposée; ensuite, au moyen de ces différentielles successives, éliminer de la proposée toutes les quantités $p, q, r,$... etc.; il ne restera plus qu'une équation en x, y, A, B, C, D, E, et il faudra trouver entre les cinq constantes les relations qui satisferont à cette équation. Sur quoi il faut observer que si cette équation avoit plusieurs facteurs, le facteur utile sera celui qui, pour devenir nul par lui-même, exigera précisément le nombre de relations entre les constantes, égal au nombre des constantes surnuméraires.

Exemple :

L'équation générale des cercles est $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, dont la différentielle délivrée des trois constantes et du troisième ordre est :

$$(C) \qquad (1+p^2)\,r = 3pq^2.$$

Pour s'assurer si cette équation, considérée comme la pro-

posée, appartient à une section conique, il faut les différencier deux fois de suite ; ce qui donne :

$$(1+p^2)^2 s = 3q^3(1+5p^2)$$
$$(1+p^2)^3 t = 15pq^4(3+7p^2),$$

et substituer dans l'équation du cinquième ordre (B) les valeurs de r, s, t. Or, par cette substitution l'équation (B) est satisfaite donc la proposée appartient à une section conique et a pour intégrale l'équation.

$$(A) \quad Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+1=0$$

qui contient deux constantes de trop ; il faut donc trouver entre les cinq constantes deux relations.

Pour cela il faut différencier trois fois consécutives l'équation (A); la première différenciation donne :

$$p\{Ay+Bx+D\}+By+Cx+E=0$$

qui, faisant pour abréger, $\qquad Ay+Bx+D=M$

et $\qquad By+Cx+E=N,$

devient $\qquad p=\frac{-N}{M}$

différenciant ensuite, on a :

$$q=-\frac{(AN^2-2BMN+CM^2)}{M^3}$$

$$r=-\frac{3(AN^2-2BNM+CM^2)(AN-BM)}{M^5}$$

Si l'on substitue les valeurs de p, q, r, dans la proposée (C), on a l'équation suivante, qui est composée de trois facteurs :

$$M\{AN^2-2BMN+CM^2\}\{B(M^2-N^2)+MN(C-A)\}=0$$

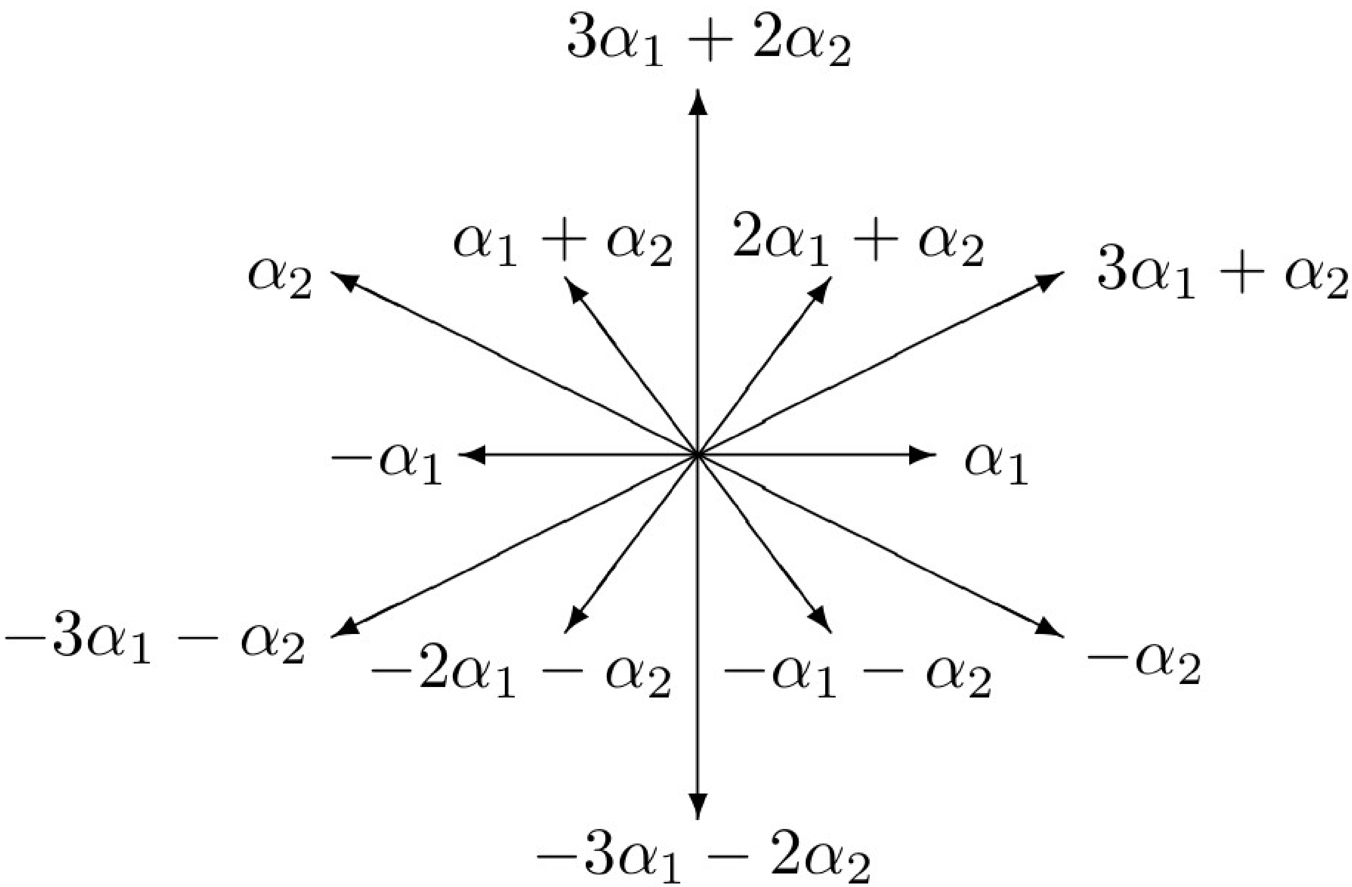
Or, de ces trois facteurs, les deux premiers ne sont pas utiles ; en effet, le premier, M, c'est-à-dire $Ay+Bx+D$ ne peut devenir nul par lui-même, à moins que l'on ait $A=0, B=0, D=0$, ce qui fait trois relations; tandis qu'il n'en faut que deux.

Le second, $AN^2-2BMN+CM^2$ ne peut devenir nul, à moins que l'on ait $A=0$, $B=0$, $C=0$, ce qui fait également trois relations; et si dans le même facteur on faisoit $M=0$, $N=0$, il faudroit que toutes les constantes fussent nulles chacune en particulier.

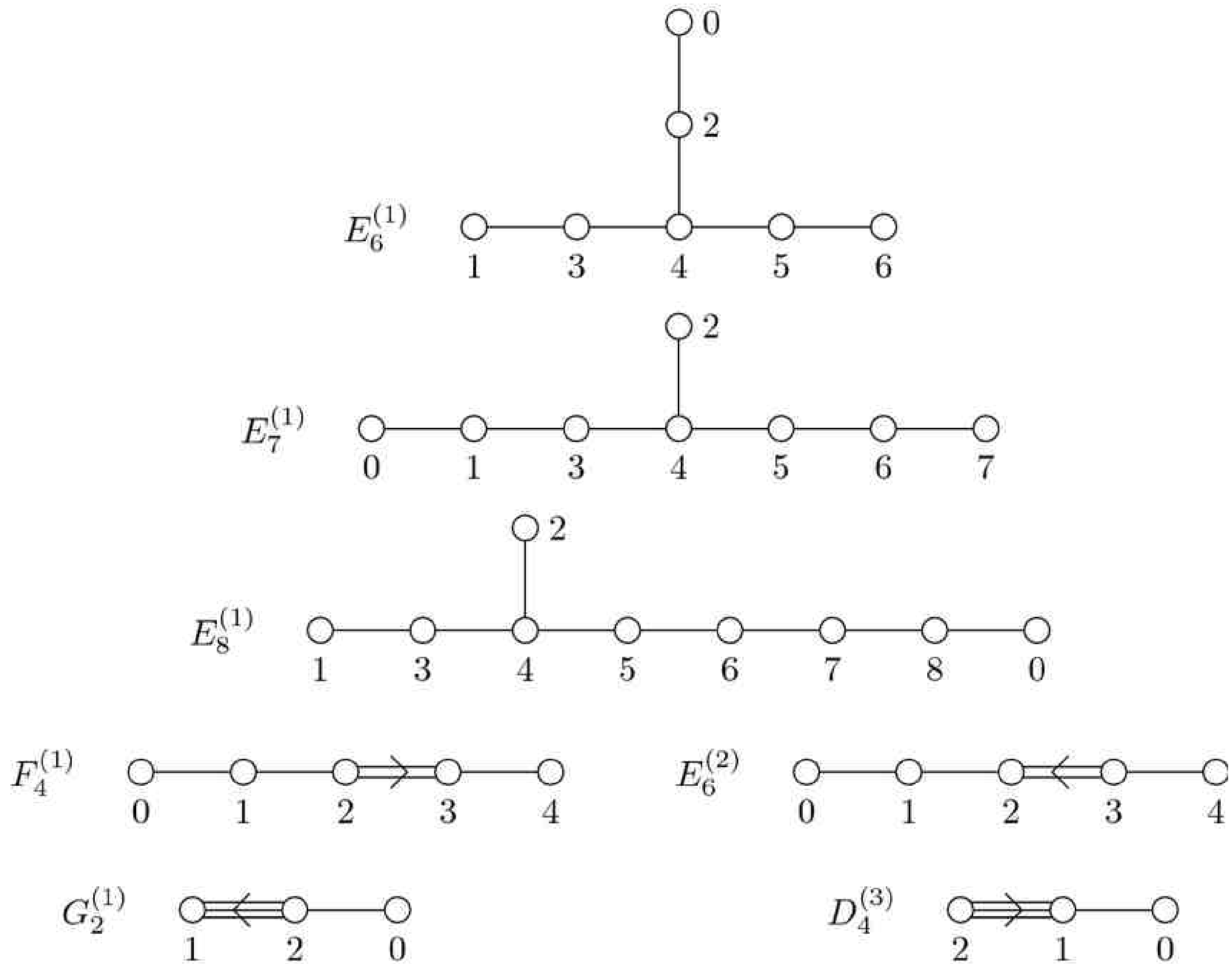
Il n'y a donc que le troisième facteur qui devient nul au moyen des deux relations suivantes :

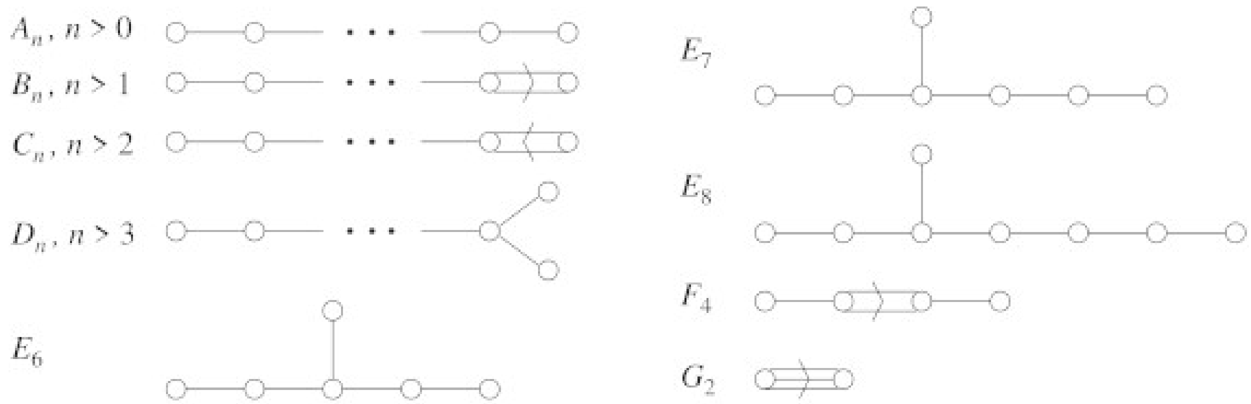
$$B=0$$
$$C=A$$

Systèmes de racines : Killing



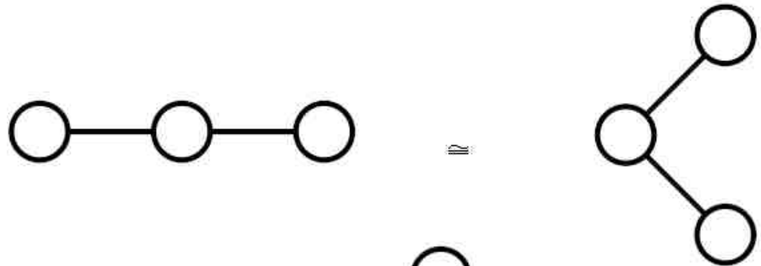
Diagrammes de Dynkin



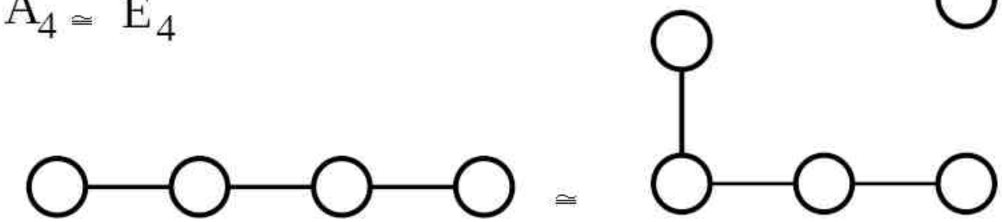

A_n, $n > 0$
B_n, $n > 1$
C_n, $n > 2$
D_n, $n > 3$
E_6
E_7
E_8
F_4
G_2

$B_2 \cong C_2$

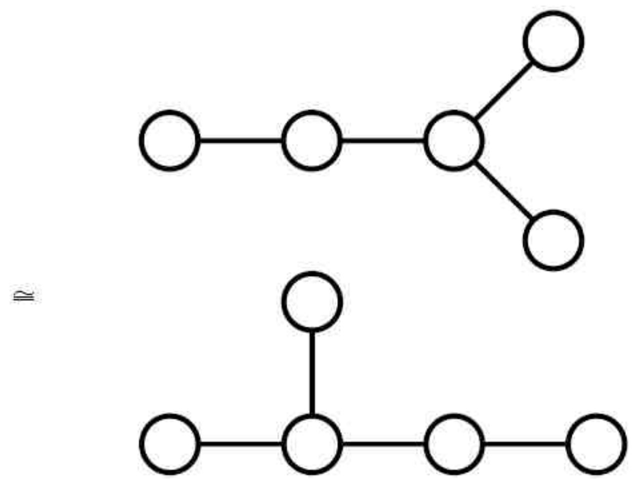
$A_3 \cong D_3$



$A_4 \cong E_4$



$D_5 \cong E_5$

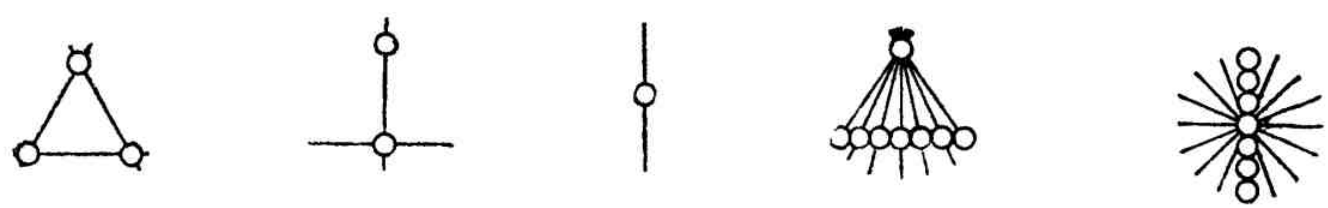


Sous-groupes du groupe projectif

Im Ganzen giebt es also innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene die folgenden verschiedenen Typen von infinitesimalen Transformationen:

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{c} \boxed{xp + cyq \qquad (c \neq 0, 1)} \\ \boxed{p + yq} \qquad \boxed{p + xq} \qquad \boxed{yq} \qquad \boxed{q}\,. \end{array}\right.$$

Die Punkte und Geraden, die bei diesen infinitesimalen Transformationen in Ruhe bleiben, bilden der Reihe nach die folgenden Figuren:



Dritter Typus.

Bei der eingliedrigen Gruppe des *dritten* Typus $p + xq$ erhalten wir als die Bahncurven die Integralcurven der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x},$$

d. h. die Curven zweiten Grades

$$y - \tfrac{1}{2}x^2 = \text{Const.}$$

Die elementare analytische Theorie der *Curven zweiten Grades oder*

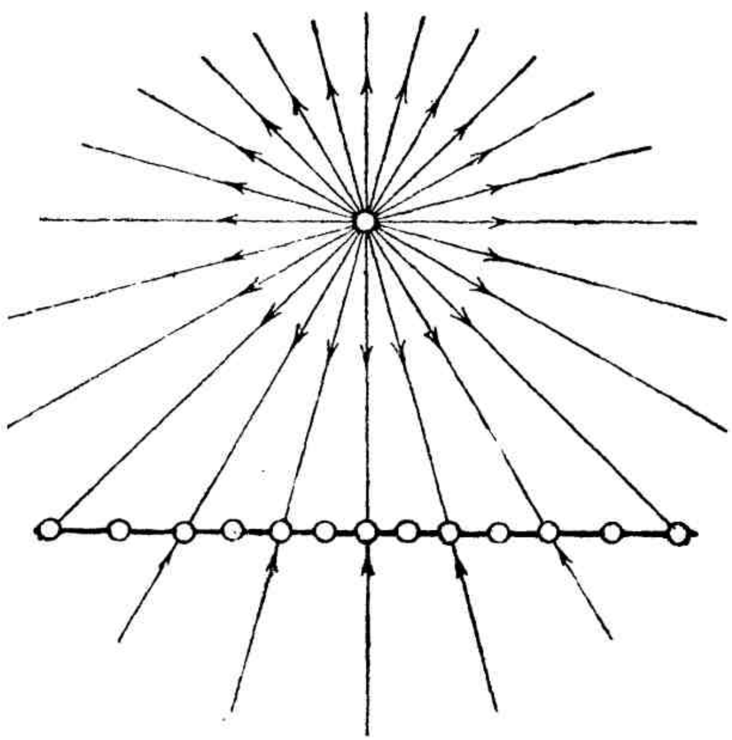


Fig. 14.

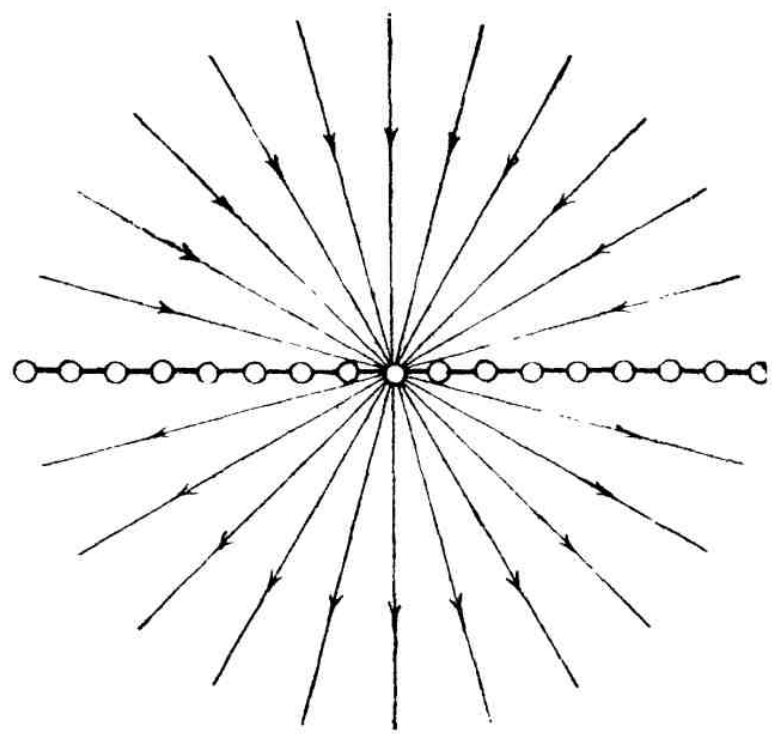


Fig. 15.

Verlauf der Bahncurven. Wählt man die beiden invarianten Punkte als die unendlich fernen Punkte der Axen und die eine invariante Gerade als x-Axe, so hat Uf die Form $p + yq$ und die Bahncurven werden die Integralcurven von

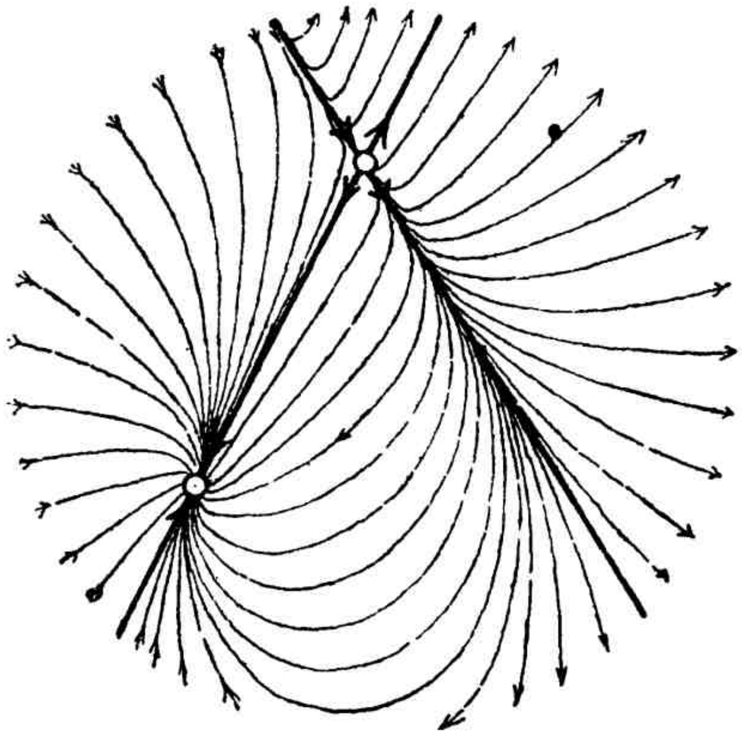


Fig. 22.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y},$$

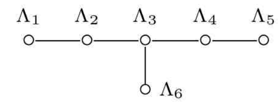
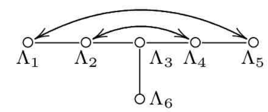
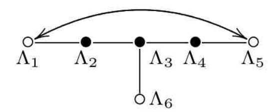
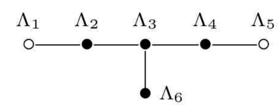
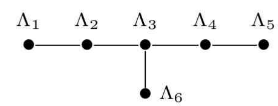
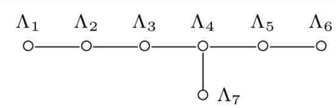
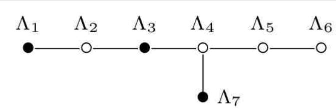
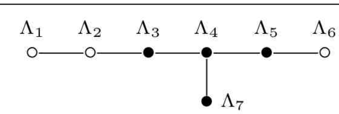
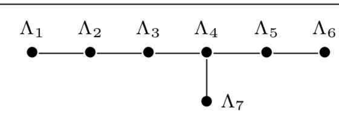
d. h. die *transcendenten* Curven

$$y = \text{Const.}\, e^x.$$

Dieselben gehen alle durch die beiden invarianten Punkte, was daraus folgt, dass

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{\lg y + \text{Const.}}$$

Diagrammes de Satake

Real form	Satake diagram with a weight	s	ν	Index
EI		e	$\neq e$	$+1$
EII		$\neq e$	$\neq e$	$+1$
EIII		$\neq e$	$\neq e$	$+1$
EIV		e	$\neq e$	$+1$
compact form of E_6		$\neq e$	$\neq e$	$+1$
EV		e	e	$+1$
EVI		e	e	$(-1)^{\Lambda_1+\Lambda_3+\Lambda_7}$
EVII		e	e	$+1$
compact form of E_7		e	e	$(-1)^{\Lambda_1+\Lambda_3+\Lambda_7}$

Lie 1883

- **Classification de Lie des équations différentielles d'ordre** 2

Table 7

Symmetry Classification of Second Order Ordinary Differential Equations

Symmetry Group	Dim	Type	Invariant Equation
∂_u	1	3.1	$u_{xx} = F(x, u_x)$
∂_x, ∂_u	2	1.5	$u_{xx} = F(u_x)$
$\partial_x, e^x\partial_u$	2	1.5	$u_{xx} - u_x = F(u_x - u)$
$\partial_x, x\partial_x - u\partial_u,$ $x^2\partial_x - 2xu\partial_u$	3	1.1	$u_{xx} = \dfrac{3u_x^2}{2u} + cu^3$
$\partial_x, x\partial_x - u\partial_u,$ $x^2\partial_x - (2xu+1)\partial_u$	3	1.2	$u_{xx} = 6uu_x - 4u^3 + c(u_x - u^2)^{3/2}$
$\partial_x, \partial_u, x\partial_x + \alpha u\partial_u$ $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2$	3	1.7	$u_{xx} = cu_x^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}$
$\partial_x, \partial_u, x\partial_x + (x+u)\partial_u$	3	1.8	$u_{xx} = ce^{-u_x}$
$\partial_x, \partial_u, x\partial_x, u\partial_x, x\partial_u, u\partial_u,$ $x^2\partial_x + xu\partial_u, xu\partial_x + u^2\partial_u$	8	2.3	$u_{xx} = 0$

Élie Cartan 1932

Si une hypersurface admettant un groupe pseudo-conforme transitif n'est pas localement équivalente à l'hypersphère, elle est globalement équivalente à l'une des hypersurfaces suivantes ou à l'une de leurs variétés de recouvrement: [7, p. 1284]

$$1^{\circ}\ (E)\quad \frac{y-\overline{y}}{2i} = \left(\frac{x-\overline{x}}{2i}\right)^{m}, \quad \text{avec } \frac{x-\overline{x}}{2i} > 0 \qquad (|m| \geqslant 1,\ m \neq 1, 2)\,;$$

$$2^{\circ}\ (F)\quad \frac{y-\overline{y}}{2i} = e^{\frac{x-\overline{x}}{y-\overline{y}}}\,;$$

$$3^{\circ}\ (H)\quad (x-\overline{x})^2 + (y-\overline{y})^2 + 4\,e^{2m \arctan \frac{x-\overline{x}}{y-\overline{y}}} = 0\,;$$

$$4^{\circ}\ (K)\quad 1 + x\overline{x} - y\overline{y} = \mu\left|1 + x^2 - y^2\right|, \quad \text{avec } \frac{x(1+\overline{y}) - \overline{x}(1+y)}{i} > 0 \qquad (\mu > 1)\,;$$

$$5^{\circ}\ (K')\quad x\overline{x} + y\overline{y} - 1 = \mu\left|x^2 + y^2 - 1\right|, \text{ sauf les points réels } (|\mu| < 1,\ \mu \neq 0)\,;$$

$$6^{\circ}\ (L)\quad x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3 = \mu\left|x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3\right| \qquad (\mu > 1).$$

Classification en dimension 5

Item	Model	Parameters	Symmetries
N.8	$u_{xx}=u_y^2$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$		$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $x\partial_x-2u\partial_u,\ y\partial_y+2u\partial_u,$ $x^2\partial_y-y\partial_u$
N.7-1a	$u_{xx}=x^\kappa u_y^2$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$	$\kappa\neq-1,-2,0,-3$	$\partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $y\partial_y+2u\partial_u,\ x\partial_x+\kappa y\partial_y+(\kappa-2)u\partial_u,$ $\frac{x^{\kappa+2}}{\kappa+2}\partial_y-\frac{\kappa+1}{2}y\partial_u$
N.7-1b	$u_{xx}=x^{-1}u_y^2$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$		$\partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $y\partial_y+2u\partial_u,\ x\partial_x-y\partial_y-3u\partial_u,$ $2x\ \log(x)\partial_y-y\partial_u$
N.7-1c	$u_{xx}=e^x u_y^2$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$		$\partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $\partial_x+y\partial_y+u\partial_u,\ y\partial_y+2u\partial_u,$ $2e^x\partial_y-y\partial_u$
N.7-2	$u_{xx}=\frac{1}{u_y}$ $u_{xy}=1$ $u_{yy}=0$		$\partial_y,\ \partial_u,\ \partial_x-\partial_u,\ \partial_y+2x\partial_u,$ $2x\partial_x-\partial_y+2u\partial_u,\ x\partial_y+x^2\partial_u,$ $x^2\partial_x+u\partial_y+x(x+2u)\partial_u$
N.6-1a	$u_{xx}=u_y^\mu$ $u_{xy}=1$ $u_{yy}=0$	$\mu\neq-1,2,0,1$	$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $\partial_y+2x\partial_u,\ x\partial_y+x^2\partial_u,$ $x\partial_x+(\mu+1)y\partial_y+(\mu+2)u\partial_u$
N.6-1b	$u_{xx}=\log u_y$ $u_{xy}=1$ $u_{yy}=0$		$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $\partial_y+2x\partial_u,\ x\partial_y+x^2\partial_u,$ $x\partial_x-(\frac{x}{2}-y)\partial_y+2u\partial_u$
N.6-1c	$u_{xx}=u_y\log u_y$ $u_{xy}=1$ $u_{yy}=0$		$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $\partial_y+2x\partial_u,\ x\partial_y+x^2\partial_u,$ $x\partial_x-(\frac{x^2}{2}-2y)\partial_y+(3u-\frac{x^3}{3})\partial_u$
N.6-2a	$u_{xx}=x^\kappa u_y^\mu$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$	$\mu\neq-1,2,0,1$ $\kappa\neq0,-3$	$\partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $x\partial_x+(\kappa+2)y\partial_y+(\kappa+2)u\partial_u,$ $(\mu-1)y\partial_y+\mu u\partial_u$
N.6-2b	$u_{xx}=x^\kappa e^{u_y}$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$	$\kappa\neq0,-3$	$\partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $x\partial_x+(\kappa+2)y\partial_y+(\kappa+2)u\partial_u,$ $y\partial_y+(y+u)\partial_u$
N.6-2c	$u_{xx}=e^x e^{u_y}$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$		$\partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $\partial_x+y\partial_y+u\partial_u,$ $y\partial_y+(y+u)\partial_u$
N.6-2d	$u_{xx}=x^\kappa\log x$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$	$\kappa\neq-1,-2,0,-3$	$\partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $x\partial_x+(\kappa+2)y\partial_y+(\kappa+2)u\partial_u,$ $y\partial_y-\frac{x^{\kappa+2}}{(\kappa+1)(\kappa+2)}\partial_u$
N.6-2e	$u_{xx}=x^{-2}\log u_y$ $u_{xy}=0$ $u_{yy}=0$		$\partial_y,\ \partial_u,\ x\partial_y,\ x\partial_u,$ $x\partial_x,$ $y\partial_y+\log x\,\partial_u$

Root type N

Item	Model	Parameters	Symmetries Root type D
D.7a	$u_{xx} = u_x^2$ $u_{xy} = 0$ $u_{yy} = \lambda u_y^2$	$\lambda \neq 0, -1$	$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $2x\partial_x - \partial_u,\ 2y\partial_y - \frac{1}{\lambda}\partial_u,$ $x^2\partial_x - x\partial_u,\ y^2\partial_y - \frac{1}{\lambda}y\partial_u$
D.7b	$u_{xx} = u_x^2$ $u_{xy} = 0$ $u_{yy} = 0$		$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $y\partial_y,\ y\partial_u,$ $2x\partial_x - \partial_u,\ x^2\partial_x - x\partial_u$
D.6-1	$u_{xx} = u_x^2 - \frac{1}{4}u_y^4$ $u_{xy} = u_y(u_x - \frac{1}{2}u_y^2)$ $u_{yy} = u_x - \frac{1}{2}u_y^2$		$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $x\partial_y - y\partial_u,\ 2x\partial_x + y\partial_y - \partial_u,$ $x^2\partial_x + xy\partial_y - (x + \frac{1}{2}y^2)\partial_u$
D.6-2a	$u_{xx} = u_x^\mu$ $u_{xy} = 0$ $u_{yy} = 0$	$\mu \neq 0, 1, 2$	$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $y\partial_u,\ y\partial_y,$ $\frac{\mu-1}{\mu-2}x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u$
D.6-2b	$u_{xx} = e^{u_x}$ $u_{xy} = 0$ $u_{yy} = 0$		$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $y\partial_u,\ y\partial_y,$ $x\partial_x + y\partial_y + (u - x)\partial_u$
D.6-3a	$u_{xx} = \lambda u_x^2 \frac{(u - u_x u_y)^{1/2}}{u^{3/2}}$ $u_{xy} = 1 + \lambda(u_x u_y - 2u)\frac{(u - u_x u_y)^{1/2}}{u^{3/2}}$ $u_{yy} = \lambda u_y^2 \frac{(u - u_x u_y)^{1/2}}{u^{3/2}}$	$\lambda \neq 0, \pm\frac{1}{2}$	$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + u\partial_u,\ y\partial_y + u\partial_u,$ $x\partial_x + y^2\partial_y + 2yu\partial_u,$ $x^2\partial_x + u\partial_y + 2xu\partial_u$
D.6-3b	$u_{xx} = u_x^2(1 - 2u_x u_y)^{1/2}$ $u_{xy} = (u_x u_y - 1)(1 - 2u_x u_y)^{1/2}$ $u_{yy} = u_y^2(1 - 2u_x u_y)^{1/2}$		$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_u,$ $x\partial_x - y\partial_y,$ $u\partial_y + x\partial_u,\ u\partial_x + y\partial_u$
D.6-4	$u_{xx} = 0$ $u_{xy} = \frac{1 + u_x u_y}{u}$ $u_{yy} = 0$		$\partial_x,\ \partial_y,$ $2x\partial_x + u\partial_u,\ 2y\partial_y + u\partial_u,$ $x^2\partial_x + xu\partial_u,\ y^2\partial_y + yu\partial_y$

Item	Model	Parameters	Symmetries Root type III
III.6-1	$u_{xx} = \frac{u_x}{x - u_y}$ $u_{xy} = 0$ $u_{yy} = 0$		$\partial_y,\ \partial_u,$ $\partial_x + y\partial_u,\ x\partial_y + \frac{x^2}{2}\partial_u,$ $y\partial_y + u\partial_u,\ x\partial_x + u\partial_u$
III.6-2	$u_{xx} = 2u_y(2u_x - uu_y)$ $u_{xy} = u_y^2$ $u_{yy} = 0$		$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_y - \partial_u,$ $y\partial_y + u\partial_u,\ 2x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u,$ $x^2\partial_x + xy\partial_y - (y + xu)\partial_u$

Table A.1. Classification of type N cases

<table>
<tr><th>Model</th><th>Parameters</th><th>Symmetries</th><th>Lie algebra structure</th><th>Abstract ILC structure</th></tr>
<tr><td>N.8
$u_{11} = q^2$
$u_{12} = 0$
$u_{22} = 0$</td><td></td><td>$S_1 = -y\partial_y - 2u\partial_u - 2p\partial_p - q\partial_q$
$S_2 = -x\partial_x - 2y\partial_y - 2u\partial_u - p\partial_p$
$N_1 = \frac{x^2}{2}\partial_y - \frac{y}{2}\partial_u - qx\partial_p - \frac{1}{2}\partial_q$
$N_2 = \partial_x$
$N_3 = -x\partial_y + q\partial_p$
$N_4 = -\frac{x}{2}\partial_u - \frac{1}{2}\partial_p$
$N_5 = -\frac{1}{2}\partial_u$
$N_6 = -\partial_y$
(General pt: $x = y = u = p = q = 0$)</td><td>$\begin{array}{c|cccccccc} & S_1 & S_2 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \\ \hline S_1 & \cdot & \cdot & N_1 & \cdot & N_3 & 2N_4 & 2N_5 & N_6 \\ S_2 & & \cdot & \cdot & N_2 & N_3 & N_4 & 2N_5 & 2N_6 \\ N_1 & & & \cdot & N_3 & N_4 & \cdot & \cdot & N_5 \\ N_2 & & & & \cdot & N_6 & N_5 & \cdot & \cdot \\ N_3 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_4 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_5 & & & & & & & \cdot & \cdot \\ N_6 & & & & & & & & \cdot \end{array}$</td><td>$E/\mathfrak{k}:$ N_2, N_6
$V/\mathfrak{k}:$ N_1, N_4
$\mathfrak{k}:$ N_3, S_1, S_2</td></tr>
<tr><td>N.7-1
$u_{11} = q^2 x^\kappa$
$u_{12} = 0$
$u_{22} = 0$</td><td>$\kappa \neq -1, -2, 0, -3, \infty$
($a^2 \neq \frac{1}{2}, -2$)</td><td>$S_1 = -y\partial_y - 2u\partial_u - 2p\partial_p - q\partial_q$
$S_2 = -x\partial_x - (\kappa+2)y\partial_y - (\kappa+2)u\partial_u$
$\quad -(\kappa+1)p\partial_p$
$N_1 = \frac{x^{\kappa+2}}{\kappa+2}\partial_y - \frac{\kappa+1}{2}y\partial_u - x^{\kappa+1}q\partial_p$
$\quad -\frac{k+1}{2}\partial_q$
$N_2 = x\partial_y - q\partial_p$
$N_3 = \frac{\kappa+1}{2}(x\partial_u + \partial_p)$
$N_4 = \frac{\kappa+1}{2}\partial_u$
$N_5 = \partial_y$
(General pt: $y = u = p = q = 0, x = 1$)</td><td>$\begin{array}{c|ccccccc} & S_1 & S_2 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 \\ \hline S_1 & \cdot & \cdot & N_1 & N_2 & 2N_3 & 2N_4 & N_5 \\ S_2 & & \cdot & \cdot & (\kappa+1)N_2 & (\kappa+1)N_3 & (\kappa+2)N_4 & (\kappa+2)N_5 \\ N_1 & & & \cdot & N_3 & \cdot & \cdot & N_4 \\ N_2 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_3 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_4 & & & & & & \cdot & \cdot \\ N_5 & & & & & & & \cdot \end{array}$</td><td>$E/\mathfrak{k}:$ S_2, N_2
$V/\mathfrak{k}:$ $N_3 - N_4,$
$-N_1 + \frac{1}{\kappa+2}N_2$
$\mathfrak{k}:$ $S_1, N_2 - N_5$</td></tr>
<tr><td>$u_{11} = q^2 x^{-1}$
$u_{12} = 0$
$u_{22} = 0$</td><td>$\kappa = -1$
($a = \frac{1}{\sqrt{2}}$)</td><td>$S_1 = -y\partial_y - 2u\partial_u - 2p\partial_p - q\partial_q$
$S_2 = -x\partial_x - y\partial_y - u\partial_u$
$N_1 = 2x(\ln(x) - 1)\partial_y - y\partial_u$
$\quad -2\ln(x)q\partial_p - \partial_q$
$N_2 = x\partial_y - q\partial_p$
$N_3 = x\partial_u + \partial_p$
$N_4 = \partial_u$
$N_5 = \partial_y$
(General pt: $y = u = p = q = 0, x = 1$)</td><td>$\begin{array}{c|ccccccc} & S_1 & S_2 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 \\ \hline S_1 & \cdot & \cdot & N_1 & N_2 & 2N_3 & 2N_4 & N_5 \\ S_2 & & \cdot & -2N_2 & \cdot & \cdot & N_4 & N_5 \\ N_1 & & & \cdot & N_3 & \cdot & \cdot & N_4 \\ N_2 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_3 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_4 & & & & & & \cdot & \cdot \\ N_5 & & & & & & & \cdot \end{array}$</td><td>$E/\mathfrak{k}:$ S_2, N_2
$V/\mathfrak{k}:$ $N_3 - N_4,$
$N_1 + 2N_2$
$\mathfrak{k}:$ $S_1, N_2 - N_5$</td></tr>
<tr><td>$u_{11} = q^2 e^x$
$u_{12} = 0$
$u_{22} = 0$</td><td>$\kappa = \infty$
($a = \pm 2i$)</td><td>$S_1 = -y\partial_y - 2u\partial_u - 2p\partial_p - q\partial_q$
$S_2 = -\partial_x - y\partial_y - u\partial_u - p\partial_p$
$N_1 = 2e^x\partial_y - y\partial_u$
$\quad -2e^x q\partial_p - \partial_q$
$N_2 = x\partial_y - q\partial_p$
$N_3 = x\partial_u + \partial_p$
$N_4 = \partial_u$
$N_5 = \partial_y$
(General pt: $x = y = u = p = q = 0,$)</td><td>$\begin{array}{c|ccccccc} & S_1 & S_2 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 \\ \hline S_1 & \cdot & \cdot & N_1 & N_2 & 2N_3 & 2N_4 & N_5 \\ S_2 & & \cdot & \cdot & N_2 - N_5 & N_3 - N_4 & N_4 & N_5 \\ N_1 & & & \cdot & N_3 & \cdot & \cdot & N_4 \\ N_2 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_3 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_4 & & & & & & \cdot & \cdot \\ N_5 & & & & & & & \cdot \end{array}$</td><td>$E/\mathfrak{k}:$ S_2, N_5
$V/\mathfrak{k}:$ $N_3, -N_1 + 2N_5$
$\mathfrak{k}:$ S_1, N_2</td></tr>
<tr><td>N.7-2
$u_{11} = q^{-1}$
$u_{12} = 1$
$u_{22} = 0$</td><td></td><td>$X = -\partial_x + \partial_u$
$H = -2x\partial_x + \partial_y - 2u\partial_u - 2q\partial_q$
$Y = x^2\partial_x + u\partial_y + (2ux + x^2)\partial_u$
$\quad +(2x + 2u - qp)\partial_p + q(2x - q)\partial_q$
$N_1 = x\partial_y + x^2\partial_u - (q - 2x)\partial_p$
$N_2 = -\partial_y - 2x\partial_u - 2\partial_p$
$N_3 = 2\partial_u$
$N_4 = \partial_y$
(General pt: $y = u = p = q = 0, x = 1$)</td><td>$\begin{array}{c|ccccccc} & X & H & Y & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ \hline X & \cdot & -2X & H & N_2 & N_3 & \cdot & \cdot \\ H & & \cdot & -2Y & -2N_1 & \cdot & 2N_3 & \cdot \\ Y & & & \cdot & \cdot & 2N_1 & 2N_2 & \cdot \\ N_1 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_2 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_3 & & & & & & \cdot & \cdot \\ N_4 & & & & & & & \cdot \end{array}$</td><td>$E/\mathfrak{k}:$ $X + Y + N_1 - \frac{1}{2}N_3,$
$-N_1 + \frac{1}{2}N_3 + N_4$
$V/\mathfrak{k}:$ Y, N_1
$\mathfrak{k}:$ $H - 2Y - N_4,$
$-2N_1 + N_2 + N_4$</td></tr>
</table>

Cas simplement transitif

Label	Affinely simply-transitive non-degenerate real surface $\mathcal{F}(x_1, x_2, u) = 0$	Holomorphic symmetries of $\mathcal{F}(\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Re}(z_2), \mathrm{Re}(w)) = 0$ beyond $i\partial_{z_1}, i\partial_{z_2}, i\partial_w$	Levi-definite condition
T1	$u = x_1^\alpha x_2^\beta$ Non-degeneracy: $\alpha\beta(1-\alpha-\beta) \neq 0$ Restriction: $(\alpha, \beta) \neq (1,1), (-1,1), (1,-1)$ Redundancy: $(\alpha, \beta) \sim (\beta, \alpha) \sim \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha}\right)$	$z_1\partial_{z_1} + \alpha w\partial_w$, $z_2\partial_{z_2} + \beta w\partial_w$	$\alpha\beta(1-\alpha-\beta) > 0$
T2	$u = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^\alpha \exp\left(\beta \arctan(\frac{x_2}{x_1})\right)$ Non-degeneracy: $\alpha \neq \frac{1}{2}$ & $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ Restriction: $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$ Redundancy: $(\alpha, \beta) \sim (\alpha, -\beta)$	$z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2} + 2\alpha w\partial_w$, $z_2\partial_{z_1} - z_1\partial_{z_2} - \beta w\partial_w$	$\alpha > \frac{1}{2}$
T3	$u = x_1\left(\alpha \ln(x_1) + \ln(x_2)\right)$ Non-degeneracy: $\alpha \neq -1$	$z_1\partial_{z_1} - \alpha z_2\partial_{z_2} + w\partial_w$, $z_2\partial_{z_2} + z_1\partial_w$	$\alpha < -1$
T4	$\left(u - x_1x_2 + \frac{x_1^3}{3}\right)^2 = \alpha\left(x_2 - \frac{x_1^2}{2}\right)^3$ Non-degeneracy: $\alpha \neq -\frac{8}{9}$ Restriction: $\alpha \neq 0$	$z_1\partial_{z_1} + 2z_2\partial_{z_2} + 3w\partial_w$, $\partial_{z_1} + z_1\partial_{z_2} + z_2\partial_w$	$\alpha < -\frac{8}{9}$
T5	$x_1u = x_2^2 + \epsilon x_1^\alpha$ Non-degeneracy: $\alpha \neq 1, 2$ Restriction: $\alpha \neq 0$	$z_1\partial_{z_1} + \frac{\alpha}{2} z_2\partial_{z_2} + (\alpha - 1)w\partial_w$, $z_1\partial_{z_2} + 2z_2\partial_w$	$\epsilon(\alpha-1)(\alpha-2) > 0$
T6	$x_1u = x_2^2 + \epsilon x_1^2 \ln(x_1)$	$z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2} + (\epsilon z_1 + w)\partial_w$, $z_1\partial_{z_2} + 2z_2\partial_w$	$\epsilon = +1$

TABLE 1. All simply-transitive *tubes* $M^5 \subset \mathbb{C}^3$. Parameters $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and $\epsilon = \pm 1$.

5.4. **Related equi-affine geometry.** Restricting to the *real* setting, we can uncover the geometric meaning of the invariant (5.4). For $(x, y, u, a, b, c) \in \mathbb{R}^6 \simeq_{\text{loc}} J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, define

$$\mathcal{A} = \frac{(y - b - u(x - a))(y - b - c(x - a))}{2(u - c)}. \tag{5.11}$$

We now give two lovely interpretations for $\mathcal{A}$. These are phrased in terms of classical geometric constructions for which invariance under the *planar equi-affine* group $\mathrm{SAff}(2, \mathbb{R}) := \mathsf{SL}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ is manifest, since this group preserves areas and maps lines to lines.

First, fixing $(x, y, u, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$, consider in $\mathbb{R}^2$ the line L_1 through the point (x, y) with slope u, and the line L_2 through (a, b) with slope c. If $u \neq c$, these lines intersect at a unique point (s, t). Adjoining a third line L_3 passing through (distinct) points (x, y) and (a, b) then determines a triangle, and it is a simple exercise to verify that $|\mathcal{A}|$ is its area.

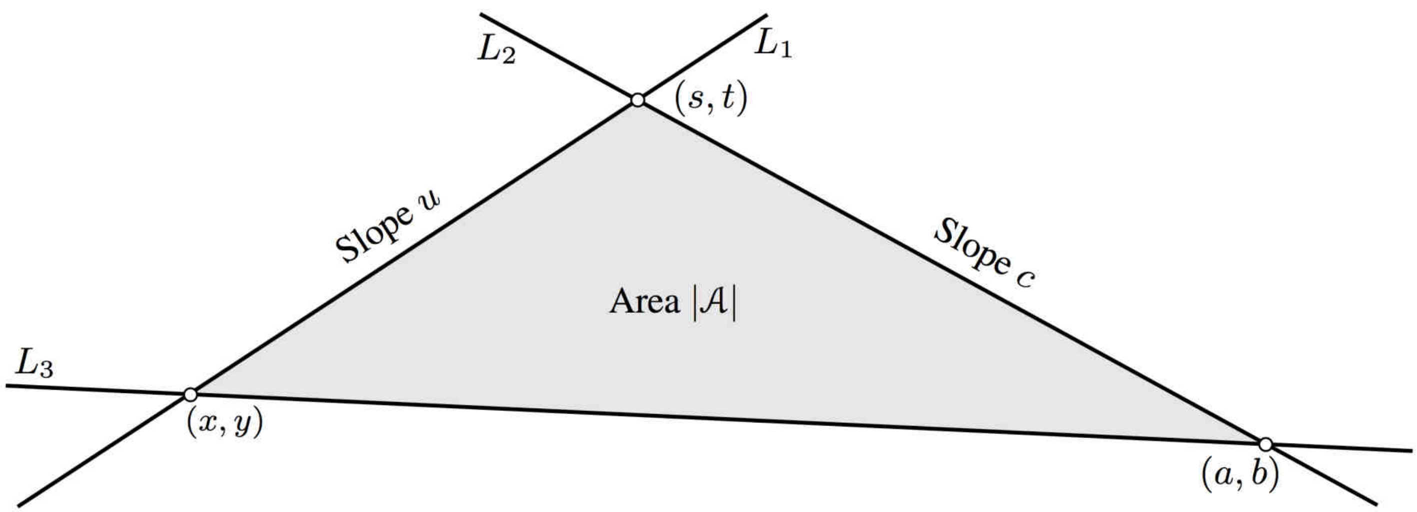


FIGURE 1. Geometric construction of the joint invariant $\mathcal{A}$.

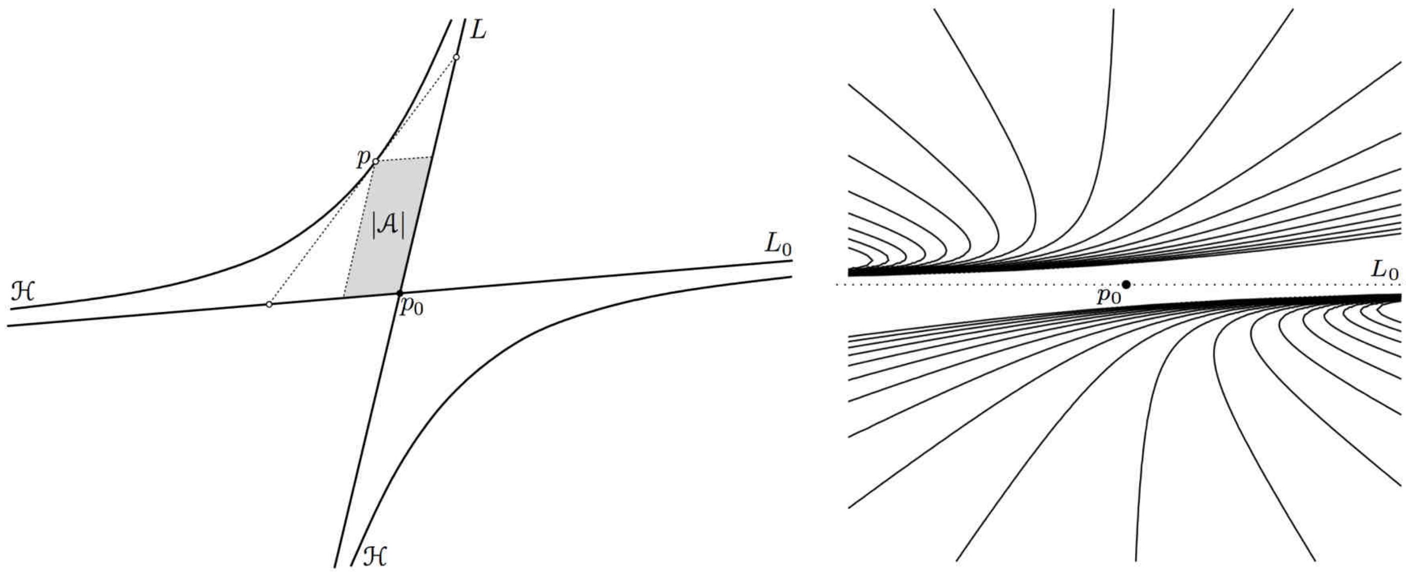
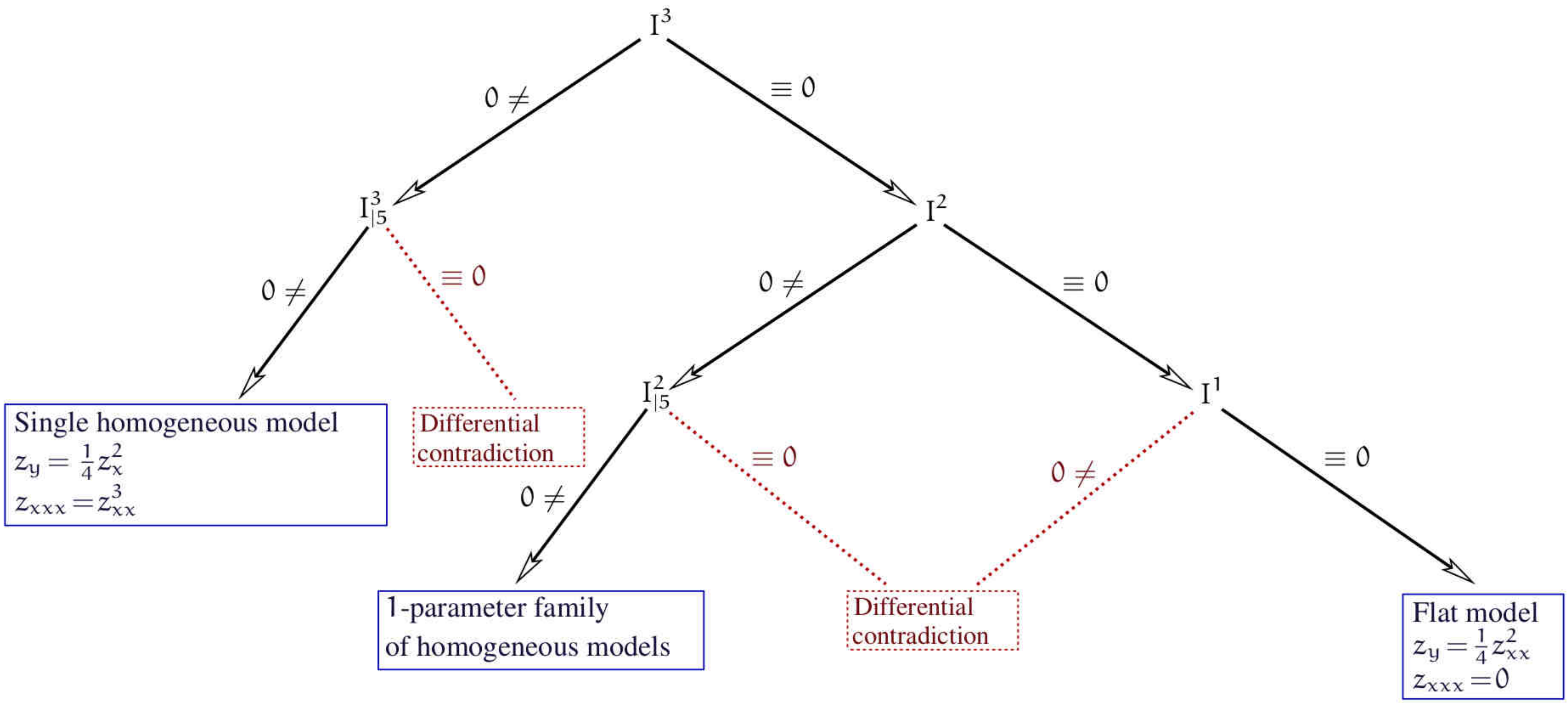


FIGURE 2. Asymptotes-parallelogram and a foliation by hyperbolas with constant area

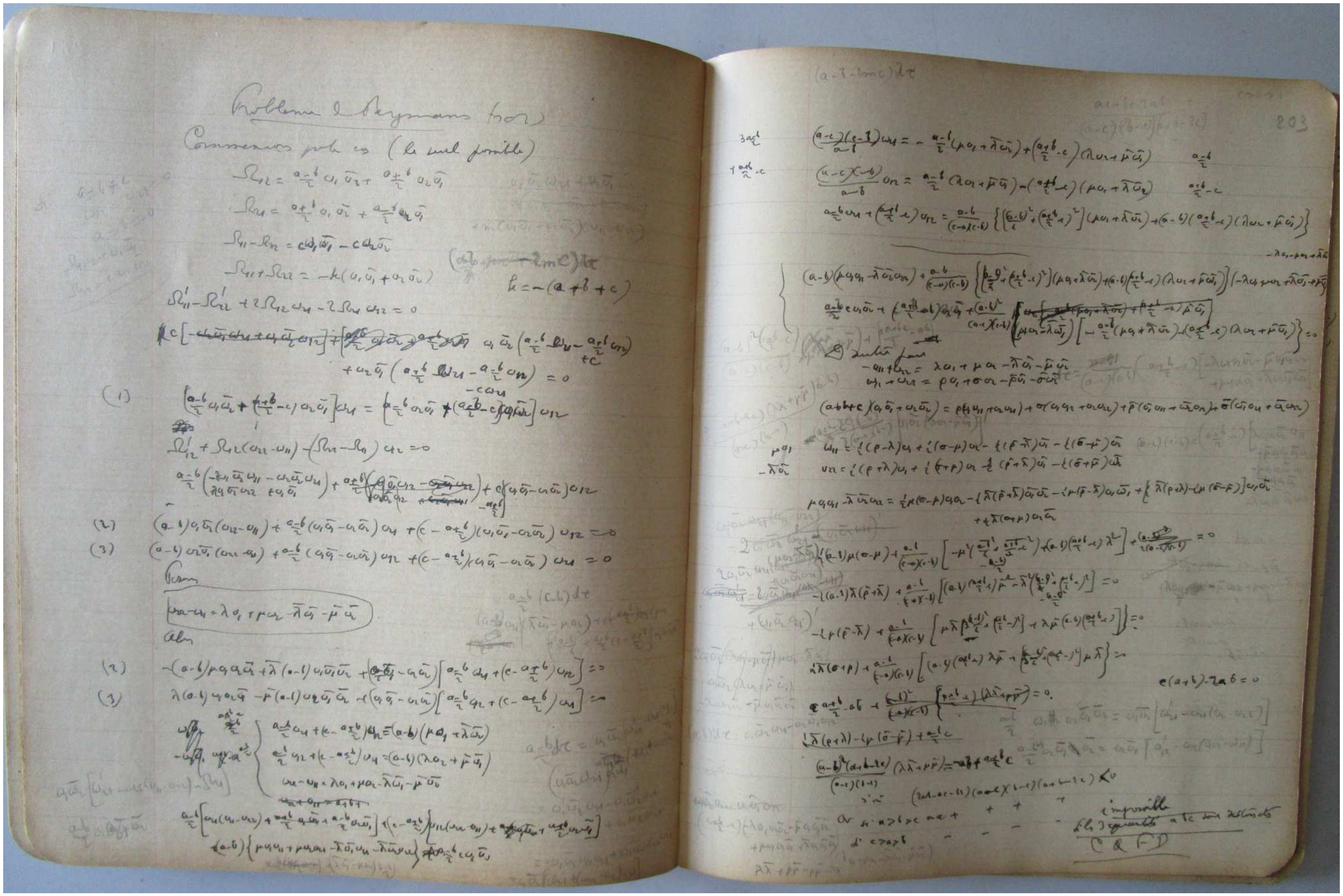
Label	Real affine surface	Complete 2nd order PDE system
T1	$u = \frac{1}{x_1 x_2}$	$\begin{cases} w_{11} = e^{2\pi i/3} w_1^{5/3} w_2^{-1/3} \\ w_{12} = \frac{1}{2} e^{2\pi i/3} w_1^{2/3} w_2^{2/3} \\ w_{22} = e^{2\pi i/3} w_1^{-1/3} w_2^{5/3} \end{cases}$
	$u = x_1 x_2^{\beta} \quad (\beta \neq 0, \pm 1)$	$\begin{cases} w_{11} = 0 \\ w_{12} = \frac{\beta}{2} w_1^{\frac{\beta-1}{\beta}} \\ w_{22} = \frac{\beta-1}{2} w_2 w_1^{-\frac{1}{\beta}} \end{cases}$
T2	$u = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$	$\begin{cases} w_{11} = \frac{2^{2/3}(3w_1^2 - w_2^2)}{4(w_1^2+w_2^2)^{1/3}} \\ w_{12} = \frac{2^{2/3} w_1 w_2}{(w_1^2+w_2^2)^{1/3}} \\ w_{22} = \frac{2^{2/3}(3w_2^2 - w_1^2)}{4(w_1^2+w_2^2)^{1/3}} \end{cases}$
	$u = \exp(\beta \arctan(\frac{x_2}{x_1}))$ $(\beta \neq 0)$	$\begin{cases} w_{11} = (\frac{w_1^2}{2} - \frac{1}{\beta} w_1 w_2) \exp(\beta \arctan(\frac{w_1}{w_2})) \\ w_{12} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\beta}(w_1^2 - w_2^2) + w_1 w_2) \exp(\beta \arctan(\frac{w_1}{w_2})) \\ w_{22} = (\frac{w_2^2}{2} + \frac{1}{\beta} w_1 w_2) \exp(\beta \arctan(\frac{w_1}{w_2})) \end{cases}$
T3	$u = x_1 \ln(x_2)$	$\begin{cases} w_{11} = 0 \\ w_{12} = \frac{1}{2} e^{-w_1} \\ w_{22} = -\frac{1}{2} w_2 e^{-w_1} \end{cases}$
T4	$(u - x_1 x_2 + \frac{x_1^3}{3})^2 = \alpha(x_2 - \frac{x_1^2}{2})^3$ $(\alpha \neq 0, -\frac{8}{9})$	$\begin{cases} w_{11} = -\frac{3\sqrt{\alpha(9\alpha+8)}(w_2^2+w_1)}{8\sqrt{w_2^2+2w_1}} - \frac{9\alpha+8}{8} w_2 \\ w_{12} = \frac{3\sqrt{\alpha(9\alpha+8)} w_2}{16\sqrt{w_2^2+2w_1}} + \frac{9\alpha+8}{16} \\ w_{22} = -\frac{3\sqrt{\alpha(9\alpha+8)}}{16\sqrt{w_2^2+2w_1}} \end{cases}$
T5	$x_1 u = x_2^2 + \epsilon x_1^4$	$\begin{cases} w_{11} = \sqrt{3\epsilon} \frac{w_2^2+2w_1}{\sqrt{w_2^2+4w_1}} \\ w_{12} = -\sqrt{3\epsilon} \frac{w_2}{\sqrt{w_2^2+4w_1}} \\ w_{22} = 2\sqrt{3\epsilon} \frac{1}{\sqrt{w_2^2+4w_1}} \end{cases}$

TABLE 4. PDE realizations of some tubular ILC structures

Exemple d’arbre de scindage



Manuscrit non publié de Élie Cartan 1938



☐ Au début des années 1930, Élie Cartan a démontré que tous les domaines homogènes bornés $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ sont symétriques.

☐ On dit que Ω est *symétrique* si, pour tout point $p \in \Omega$, il existe un automorphisme holomorphie $h \colon \Omega \longrightarrow \Omega$ fixant $p = h(p)$, tel que $dh(p) = -\mathsf{Id}$ sur l'espace tangent.

☐ Les domaines symétriques bornés sont toujours homogènes.

☐ Élie Cartan a ensuite entrepris de généraliser cela à $\mathbb{C}^3$.

☐ Il était alors nécessaire de classifier tous les domaines homogènes bornés de $\mathbb{C}^3$, ce qui exige des calculs longs et difficiles.

☐ Élie Cartan semblait convaincu qu'en dimension quelconque $n \geqslant 2$, tous les domaines homogènes bornés de $\mathbb{C}^n$ devraient être symétriques.

☐ Un manuscript de 80 pages a été achevé en 1938. Cartan ne l'a pas publié, en espérant probablement qu'une nouvelle idée devrait voir le jour afin d'embrasser la dimension quelconque $n \geqslant 2$.

☐ Cartan décéda en 1954, et aucune preuve générale ne fut trouvée.

☐ En 1964, Piateskii-Shapiro exhiba un contre-exemple, *i.e.* un domaine bornée homogène de $\mathbb{C}^4$ qui n'est *pas* symétrique, à savoir un domaine de Siegel de type II.

☐ Ce fut une surprise.

☐ Il fut alors question d'éditer le manuscrit de Cartan dans le cas $n = 3$, puisqu'il n'existait aucune classification générale dans $\mathbb{C}^3$.

☐ Mais le manuscrit de Cartan est touffu, compliqué, difficile à déchiffrer.

☐ Le projet de publication posthume ne vit jamais le jour.

☐ Au début des années 1980, Helgason suggéra à Bryant de se procurer une copie du manuscrit de Cartan, et de l'éditer pour publication.

☐ Bryant écrivit à Berger, ami de Henri Cartan, qui, avec l'aide de Bourguignon, réussit à convaincre Henri Cartan de faire une photocopie du fameux manuscrit, à condition de ne le distribuer à personne.

☐ Henri Cartan se réservait d'accorder, ou non, le droit à une publication posthume une fois que Bryant aurait achevé son travail d'édition.

☐ Mais Bryant réalisa que le manuscrit était « *rather challenging* ».

It's quite long, and it leaves a lot to the reader. Cartan's handwriting is not always entirely clear, and sometimes you have to fill in sentences that are not complete.

Also, I am convinced that Cartan had some calculations kept separate from the manuscript with the idea that he would decide at some later point whether to include them or not (maybe in response to a referee report), but I never went back to Henri to ask him to check for those among his father's papers.

As you can imagine, there are some places in the manuscript, particularly at the beginning, where he is very clever, but most of it is just painstakingly detailed calculations similar to what he did in the 5-variables paper.

It just amazes me that I have not found any significant error in Cartan's calculations ; my respect for his computational facility is just about unbounded at this point.

Géométries CR exceptionnelles

BULLETIN OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 83, Number 5, September 1977

INVARIANT DIFFERENTIAL EQUATIONS ON HOMOGENEOUS MANIFOLDS

BY SIGURDUR HELGASON[1]

1. Historical origins of Lie group theory. Nowadays when Lie groups enter

In this remarkable work, Killing finds all possibilities for the matrix (a_{ij}) and writes down the corresponding roots $\omega(X)$ (cf. [**5**, II, §15]). Thus he arrives at the statement that apart from the classical simple Lie algebras

$$A_l\ (l \geqslant 1),\quad B_l\ (l \geqslant 2),\quad C_l\ (l \geqslant 3),\quad D_l\ (l \geqslant 3)$$

(known from Lie's work), there are only six more, of ranks and dimension, respectively,

$$l = 2, 4, 4, 6, 7, 8,$$
$$r = 14, 52, 52, 78, 133, 248.$$

These exceptional Lie algebras are denoted G_2, E_4, F_4, E_6, E_7, E_8, respectively. Killing denoted G_2 by (IIC); he observed that $A_3 = D_3$, but did not notice that $E_4 = F_4$, although, as Cartan remarked, this is immediate from his

In his thesis [**1b**], É. Cartan gave a complete proof of the classification results stated by Killing; in outline his method follows Killing's program. He determined the matrices (a_{ij}), the roots $\omega(X)$ and a basis for each of the exceptional Lie algebras with respect to which the structural constants have a simple and symmetric form [**1b**, §§18–20] whereby the Jacobi identity (7) is (presumably) simple to verify.[4] But he was also interested in realizing the exceptional Lie groups by transformations, like e.g. the classical algebra C_l is the Lie algebra of the linear group leaving invariant the Pfaffian form

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + \cdots + x_l dy_l - y_l dx_l.$$

Killing had been led to expect that G_2 could be realized as a transformation group in $\mathbf{R}^5$, but not in a lower-dimensional space. Engel and Cartan showed that it can be realized as the stability group of the system

$$\begin{aligned} dx_3 + x_1 dx_2 - x_2 dx_1 &= 0, \\ dx_4 + x_3 dx_1 - x_1 dx_3 &= 0, \\ dx_5 + x_2 dx_3 - x_3 dx_2 &= 0, \end{aligned}$$

in $\mathbf{R}^5$ (Engel [**3a**], Cartan [**1b**, p. 281], Lie and Engel [**9**, vol. 3, p. 764]).

Cartan represented F_4 similarly by the Pfaffian system in $\mathbf{R}^{15}$ given by

$$(14) \qquad dz = \sum_1^4 y_i dx_i, \qquad dx_{ij} = x_i dx_j - x_j dx_i + y_h dy_k - y_k dy_h,$$

where $z, x_i, y_j, x_{ij} = -x_{ji}$ $(i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4)$ are coordinates in $\mathbf{R}^{15}$ and in (14) i, j, h, k is an even permutation [**1a**, p. 418]. Similar results for E_6 in $\mathbf{R}^{16}$, E_7 in $\mathbf{R}^{27}$ and E_8 in $\mathbf{R}^{29}$ as contact transformations are indicated in [**1a**]. Unfortunately, detailed proofs of these remarkable representations of the exceptional groups do not seem to be available.

- **In $\mathbb{C}^{8+8}$, consider :**

$$\begin{aligned}
\mathsf{Re}\, w_1 &= \mathsf{Re}\left(z_1\,\overline{z}_4 + z_2\,\overline{z}_3\right),\\
\mathsf{Re}\, w_2 &= \mathsf{Re}\left(z_1\,\overline{z}_6 + z_2\,\overline{z}_5\right),\\
\mathsf{Im}\, w_3 &= \mathsf{Im}\left(z_1\,\overline{z}_7 + z_5\,\overline{z}_3\right),\\
\mathsf{Im}\, w_4 &= \mathsf{Im}\left(z_2\,\overline{z}_7 + z_3\,\overline{z}_6 - z_5\,\overline{z}_4 - z_8\,\overline{z}_1\right),\\
\mathsf{Re}\, w_5 &= \mathsf{Re}\left(z_2\,\overline{z}_7 + z_3\,\overline{z}_6 - z_5\,\overline{z}_4 - z_8\,\overline{z}_1\right),\\
\mathsf{Im}\, w_6 &= \mathsf{Im}\left(z_2\,\overline{z}_8 + z_6\,\overline{z}_4\right),\\
\mathsf{Re}\, w_7 &= \mathsf{Re}\left(z_3\,\overline{z}_8 + z_4\,\overline{z}_7\right),\\
\mathsf{Re}\, w_8 &= \mathsf{Re}\left(z_5\,\overline{z}_8 + z_6\,\overline{z}_7\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L^2_{w_4 w_4} \;:=\;& (2\,w_1\,z_5 - 2\,w_2\,z_3 - 2\,w_3\,z_2 - w_4\,z_1 + w_5\,z_1)\,\partial_{z_1} \\
&+ (2\,w_1\,z_6 - 2\,w_2\,z_4 - w_4\,z_2 - w_5\,z_2 - 2\,w_6\,z_1)\,\partial_{z_2} \\
&+ (2\,w_1\,z_7 + 2\,w_3\,z_4 - w_4\,z_3 - w_5\,z_3 - 2\,w_7\,z_1)\,\partial_{z_3} \\
&+ (2\,w_1\,z_8 - w_4\,z_4 + w_5\,z_4 + 2\,w_6\,z_3 - 2\,w_7\,z_2)\,\partial_{z_4} \\
&+ (2\,w_2\,z_7 + 2\,w_3\,z_6 - w_4\,z_5 - w_5\,z_5 - 2\,w_8\,z_1)\,\partial_{z_5} \\
&+ (2\,w_2\,z_8 - w_4\,z_6 + w_5\,z_6 + 2\,w_6\,z_5 - 2\,w_8\,z_2)\,\partial_{z_6} \\
&- (2\,w_3\,z_8 + w_4\,z_7 - w_5\,z_7 - 2\,w_7\,z_5 + 2\,w_8\,z_3)\,\partial_{z_7} \\
&- (w_4\,z_8 + w_5\,z_8 + 2\,w_6\,z_7 - 2\,w_7\,z_6 + 2\,w_8\,z_4)\,\partial_{z_8} \\
&- 2\,w_1\,w_4\,\partial_{w_1} - 2\,w_2\,w_4\,\partial_{w_2} - 2\,w_3\,w_4\,\partial_{w_3} \\
&+ (4\,w_1\,w_8 - 4\,w_2\,w_7 - 4\,w_3\,w_6 - w_4^2 - w_5^2)\,\partial_{w_4} \\
&- 2\,w_4\,w_5\,\partial_{w_5} - 2\,w_4\,w_6\,\partial_{w_6} - 2\,w_4\,w_7\,\partial_{w_7} - 2\,w_4\,w_8\,\partial_{w_8},
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{su}(p,q)$ **CR Models :**

• **Equations for** $1 \leqslant a < c \leqslant \ell$ **:**

$$\mathsf{Im}\, w_{ac} \,=\, \mathsf{Im}\, \left\{ \begin{array}{c} z_{a,1}\,\overline{z}_{c,1} + \cdots + z_{a,n}\,\overline{z}_{n,c} \\ +u_{a,1}\,\overline{v}_{c,1} + \cdots + u_{a,m}\,\overline{v}_{c,m} \\ +v_{a,1}\,\overline{u}_{c,1} + \cdots + v_{a,m}\,\overline{u}_{c,m} \end{array} \right\},$$

and for $1 \leqslant c \leqslant a \leqslant \ell$:

$$\mathsf{Re}\, w_{ac} \,=\, \mathsf{Re}\, \left\{ \begin{array}{c} z_{a,1}\,\overline{z}_{c,1} + \cdots + z_{a,n}\,\overline{z}_{n,c} \\ +u_{a,1}\,\overline{v}_{c,1} + \cdots + u_{a,m}\,\overline{v}_{c,m} \\ +v_{a,1}\,\overline{u}_{c,1} + \cdots + v_{a,m}\,\overline{u}_{c,m} \end{array} \right\}.$$

$1 \le i \le e \qquad 1 \le j \le n$

$$L_{z_{ij} z_{ij}} = \sum_{e'=1}^{e} \sum_{n' \neq j} \left(2 z_{e'j} z_{in'}\right) \partial_{z_{e'n'}} + \sum_{1 \le e' < i} \left(2 z_{e'j} z_{ij} - w_{e'i} - w_{ie'}\right) \partial_{z_{e'j}} + \left(2 z_{ij}^2 - w_{ii}\right) \partial_{z_{ij}} + \sum_{i < e' \le e} \left(2 z_{e'j} z_{ij} - w_{e'i} + w_{ie'}\right) \partial_{z_{e'j}}$$

$$+ \sum_{e'=1}^{e} \sum_{m'=1}^{m} \left(2 z_{e'j} u_{im'}\right) \partial_{u_{e'm'}} + \sum_{e'} \sum_{m'} \left(2 z_{e'j} u_{im'}\right) \partial_{v_{e'm'}}$$

$\partial w_{n<s}$

$$+ \sum_{1 \le n < s < i} \left(z_{nj}[-w_{si} + w_{is}] + z_{sj}[w_{ni} - w_{in}]\right) \partial_{w_{ns}} + \sum_{1 \le n < i} \left(z_{nj}[w_{ii}] + z_{ij}[w_{ni} - w_{in}]\right) \partial_{w_{ni}} + \sum_{1 \le n \le i} \left(z_{nj}[w_{is} + w_{si}] + z_{sj}[w_{ni} - w_{in}]\right) \partial_{w_{ns}}$$

$$+ \sum_{i < n \le e} \left(z_{ij}[w_{is} + w_{si}] + z_{sj}[-w_{ii}]\right) \partial_{w_{is}} + \sum_{i < n < s \le e} \left(z_{nj}[w_{is} + w_{si}] + z_{sj}[-w_{in} - w_{in}]\right) \partial_{w_{ns}}$$

∂w_{nn}

$$+ \sum_{1 \le n < i} \left(z_{nj}[-2w_{ni} + 2w_{in}]\right) \partial_{w_{nn}} + \left(z_{ij}[2w_{ij}]\right) \partial_{w_{ii}} + \sum_{i < n \le e} \left(z_{nj}[2w_{in} + 2w_{ni}]\right) \partial_{w_{nn}}$$

$\partial w_{n>s}$

$$+ \sum_{1 \le s < n < i} \left(z_{nj}[-w_{si} + w_{is}] + z_{sj}[-w_{ni} + w_{in}]\right) \partial_{w_{ns}} + \sum_{1 \le s < i} \left(z_{ij}[-w_{si} + w_{is}] + z_{sj}[w_{ii}]\right) \partial_{w_{is}} + \sum_{i < n \le e} \left(z_{nj}[-w_{si} + w_{is}] + z_{sj}[w_{in} + w_{ni}]\right) \partial_{w_{ns}}$$

$$+ \sum_{i < n \le e} \left(z_{nj}[w_{ii}] + z_{ij}[w_{in} + w_{ni}]\right) \partial_{w_{ni}} + \sum_{i < s < n \le e} \left(z_{nj}[w_{is} + w_{si}] + z_{sj}[w_{in} + w_{ni}]\right) \partial_{w_{ns}}$$

19 SUMS

$1 \le i \le e \qquad 1 \le j \le n$

$$I L_{z_{ij} z_{ij}} = \sum_{e'} \sum_{n' \neq j} \left(2I z_{e'j} z_{in'}\right) \partial_{z_{e'n'}} + \sum_{1 \le e' < i} \left(2I z_{e'j} z_{ij} + I w_{e'i} + I w_{ie'}\right) \partial_{z_{e'j}} + \left(2I z_{ij}^2 + I w_{ij}\right) \partial_{z_{ij}} + \sum_{i < e' \le e} \left(2I z_{e'j} z_{ij} + I w_{e'i} - I w_{ie'}\right) \partial_{z_{e'j}}$$

$$+ \sum_{e'=1}^{e} \sum_{m'=1}^{m} \left(I 2 z_{e'j} u_{im'}\right) \partial_{u_{e'm'}} + \sum_{e'} \sum_{m'} \left(I 2 z_{e'j} u_{im'}\right) \partial_{v_{e'm'}}$$

$$+ I\left(0\right)$$

19 SUMS

$1 \le i < j \le \ell$

$$\underline{L_{w_{ij} w_{ij}}} := \sum_{1\le \ell' < i} \sum_{n'=1}^{n} \left(z_{in'}[w_{j\ell'} + w_{\ell' j}] + z_{jn'}[-w_{i\ell'} - w_{\ell' i}] \right) \partial z_{\ell' n'}$$

$$+ \sum_{n'=1}^{n} \left(z_{in'}[w_{ij}+w_{ji}] + z_{jn'}[-w_{ii}] \right) \partial z_{in'}$$

$$+ \sum_{i<\ell'<j} \sum_{n'=1}^{n} \left(z_{in'}[w_{j\ell'}+w_{\ell' j}] + z_{jn'}[w_{i\ell'} - w_{\ell' i}] \right) \partial z_{\ell' n'}$$

$$+ \sum_{n'=1}^{n} \left(z_{in'}[w_{jj}] + z_{jn'}[w_{ij} - w_{ji}] \right) \partial z_{jn'}$$

$$+ \sum_{j<\ell'\le \ell} \sum_{n'=1}^{n} \left(z_{in'}[-w_{j\ell'}+w_{\ell' j}] + z_{jn'}[w_{i\ell'} - w_{\ell' i}] \right) \partial z_{\ell' n'}$$

$$+ \sum_{1\le \ell' < i} \sum_{m'=1}^{m} \left(u_{im'}[w_{j\ell'} + w_{\ell' j}] + u_{jm'}[-w_{i\ell'} - w_{\ell' i}] \right) \partial u_{\ell' m'}$$

$$+ \sum_{m'=1}^{m} \left(u_{im'}[w_{ij}+w_{ji}] + u_{jm'}[-w_{ii}] \right) \partial u_{im'}$$

$$+ \sum_{i<\ell'<j} \sum_{m'=1}^{m} \left(u_{im'}[w_{j\ell'}+w_{\ell' j}] + u_{jm'}[w_{i\ell'} - w_{\ell' i}] \right) \partial u_{\ell' m'}$$

$$+ \sum_{m'=1}^{m} \left(u_{im'}[w_{jj}] + u_{jm'}[w_{ij} - w_{ji}] \right) \partial u_{jm'}$$

$$+ \sum_{j<\ell'\le \ell} \sum_{m'=1}^{m} \left(u_{im'}[-w_{j\ell'}+w_{\ell' j}] + u_{jm'}[w_{i\ell'} - w_{\ell' i}] \right) \partial u_{\ell' m'}$$

$$+\sum_{1\le e'<i}\ \sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\left[w_{je'}+w_{e'j}\right]+v_{jm'}\left[-w_{ie'}-w_{e'i}\right]\Big)\partial v_{e'm'}$$

$$+\sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\left[w_{ij}+w_{ji}\right]+v_{jm'}\left[-w_{ii}\right]\Big)\partial v_{im'}$$

$$+\sum_{i<e'<j}\ \sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\left[w_{je'}+w_{e'j}\right]+v_{jm'}\left[w_{ie'}-w_{e'i}\right]\Big)\partial v_{e'm'}$$

$$+\sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\left[w_{ji}\right]+v_{jm'}\left[w_{ij}-w_{ji}\right]\Big)\partial v_{jm'}$$

$$+\sum_{j<e'\le e}\ \sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\left[-w_{je'}+w_{e'j}\right]+v_{jm'}\left[w_{ie'}-w_{e'i}\right]\Big)\partial v_{e'm'}$$

Better order: 1, 6, 7, 8, 2, 17, 19, 12, 14, 3, 18, 9, 15, 16, 4, 13, 10, 11, 5

1 $$+\sum_{1\le n<i}\left(-2w_{ni}w_{jn}+2w_{nj}w_{in}\right)\partial w_{nn}$$

2 $$+\sum_{1\le n<i}\left(w_{ni}w_{ij}-w_{in}w_{ji}+w_{ii}w_{jn}\right)\partial w_{ni}$$

3 $$+\sum_{1\le n<i}\left(w_{nj}w_{ij}-w_{in}w_{jj}+w_{ji}w_{jn}\right)\partial w_{nj}$$

4 $$+\sum_{1\le s<i}\left(-w_{si}w_{ji}+w_{sj}w_{ii}+w_{is}w_{ij}\right)\partial w_{is}$$

5 $$+\left(2w_{ii}w_{ij}\right)\partial w_{ii}$$

6 $$+\sum_{i<s<j}\left(-w_{ii}w_{js}+w_{is}w_{ij}+w_{si}w_{ji}\right)\partial w_{is}$$

7 $$+\left(-w_{ii}w_{jj}+w_{ij}^2+w_{ji}^2\right)\partial w_{ij}$$

8
$$+\sum_{j<s\le e} \left(-w_{ii}w_{sj} + w_{ij}w_{is} + w_{ji}w_{si}\right)\partial w_{is}$$

9
$$+\sum_{i<n<j} \left(w_{ii}w_{nj} + w_{ji}w_{in} + w_{ij}w_{ni}\right)\partial w_{ni}$$

10
$$+\sum_{i<n<j} \left(2w_{in}w_{jn} + 2w_{ni}w_{nj}\right)\partial w_{nn}$$

11
$$+\sum_{i<n<j} \left(w_{ij}w_{nj} - w_{ni}w_{jj} + w_{ji}w_{jn}\right)\partial w_{nj}$$

12
$$+\sum_{1\le s<i} \left(-w_{si}w_{jj} + w_{sj}w_{ji} + w_{ij}w_{js}\right)\partial w_{js}$$

13
$$+\left(2w_{ij}w_{ji}\right)\partial w_{ji}$$

14
$$+\sum_{i<s<j} \left(w_{is}w_{jj} + w_{ij}w_{js} + w_{sj}w_{ji}\right)\partial w_{js}$$

15
$$+\sum_{j<n\le e} \left(2w_{in}w_{nj} - 2w_{jn}w_{ni}\right)\partial w_{nn}$$

16
$$+\sum_{j<s\le e} \left(w_{ij}w_{js} - w_{ji}w_{sj} + w_{jj}w_{si}\right)\partial w_{js}$$

SWAP

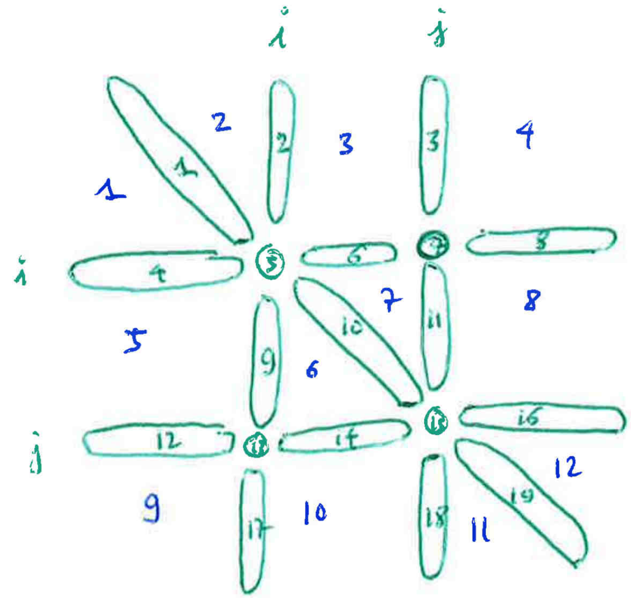
17
$$+\sum_{j<n\le e} \left(-w_{ii}w_{jn} + w_{ij}w_{ni} + w_{in}w_{ji}\right)\partial w_{ni}$$

18
$$+\sum_{j<n\le e} \left(w_{ij}w_{nj} + w_{in}w_{jj} - w_{ji}w_{jn}\right)\partial w_{nj}$$

19
$$+\left(2w_{ij}w_{jj}\right)\partial w_{jj}$$

← NOT FINISHED : 12 SUMS REMAIN

BETTER ORDER: 29, 20, 21, 22, 28, 30, 31, 23, 27, 26, 25, 24



1=1
$$+\sum_{1\le s<n<i} \left(-w_{si}w_{jn} + w_{sj}w_{in} - w_{ni}w_{js} + w_{nj}w_{is}\right)\partial w_{ns}$$

1. $\mathfrak{su}(p,q)$ CR MODELS : EXPECTED DIMENSIONS

From Zhaohu's construction :

$$\begin{aligned}
\mathsf{dim}\,\mathfrak{g}_{-2} &= \ell^2 \,=\, \mathrm{codim}\,M, \\
\mathsf{dim}\,\mathfrak{g}_{-1} &= 2\,(n+m+m)\,\ell \,=\, \mathrm{CRdim}\,M, \\
\mathsf{dim}\,\mathfrak{g}_{0} &= \mathsf{dim}\,\mathfrak{su}(p,q) - 2\,\mathrm{codim}\,M - 2\,\mathrm{CRdim}\,M, \\
\mathsf{dim}\,\mathfrak{g}_{1} &= \mathsf{dim}\,\mathfrak{g}_{-1} \\
\mathsf{dim}\,\mathfrak{g}_{2} &= \mathsf{dim}\,\mathfrak{g}_{-2},
\end{aligned}$$

hence :

$$\begin{aligned}
\mathsf{dim}\,\mathfrak{g}_{0} &= \mathsf{dim}\,\mathfrak{su}(p,q) - 2\,codimR - 2\,CRdim \\
&= (p+q)^2 - 1 - 2\,\ell^2 - 4\,(n+m+m)\,\ell \\
&= (n+m+m)^2 + 2\,\ell^2 - 1.
\end{aligned}$$

2. $\mathfrak{su}(p,q)$ CR MODELS : GENERATORS OF $\mathfrak{g}_{-2}$ AND OF $\mathfrak{g}_{-1}$

Simply :

$$\mathfrak{g}_{-2} \,=\, \mathrm{Span}\,\Big\{\partial_{w_{\underset{<}{ac}}},\ \sqrt{-1}\,\partial_{w_{\underset{\geqslant}{ac}}}\Big\}$$

Next, $\mathfrak{g}_{-1}$ is generated by :

$$\begin{aligned}
L_{z_{ij}} \,:=\, \partial_{z_{ij}} + \sum_{1\leqslant r<i} z_{rj}\,\partial_{w_{ri}} + \sum_{1\leqslant s<i} z_{sj}\,\partial_{w_{is}} + 2\,z_{ij}\,\partial_{w_{ii}} \\
+ \sum_{i<r\leqslant\ell} z_{rj}\,\partial_{w_{ri}} - \sum_{i<s\leqslant\ell} z_{sj}\,\partial_{w_{is}} \qquad\qquad {\scriptstyle (1\leqslant i\leqslant\ell,\ 1\leqslant j\leqslant n)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
IL_{z_{ij}} \;=\; \sqrt{-1}\bigg(\partial_{z_{ij}} &- \sum_{1\leqslant r<i} z_{rj}\,\partial_{w_{ri}} - \sum_{1\leqslant s<i} z_{sj}\,\partial_{w_{is}} - 2\,z_{ij}\,\partial_{w_{ii}} \\
&- \sum_{i<r\leqslant \ell} z_{rj}\,\partial_{w_{ri}} + \sum_{i<s\leqslant \ell} z_{sj}\,\partial_{w_{is}}\bigg) \qquad (1\leqslant i\leqslant \ell,\ 1\leqslant j\leqslant n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{u_{ik}} \;=\; \partial_{u_{ik}} &+ \sum_{1\leqslant r<i} v_{rk}\,\partial_{w_{ri}} + \sum_{1\leqslant s<i} v_{sk}\,\partial_{w_{is}} + 2\,v_{ik}\,\partial_{w_{ii}} \\
&+ \sum_{i<r\leqslant \ell} v_{rk}\,\partial_{w_{ri}} - \sum_{i<s\leqslant \ell} v_{sk}\,\partial_{w_{is}} \qquad (1\leqslant i\leqslant \ell,\ 1\leqslant k\leqslant m),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IL_{u_{ik}} \;=\; \sqrt{-1}\bigg(\partial_{u_{ik}} &- \sum_{1\leqslant r<i} v_{rk}\,\partial_{w_{ri}} - \sum_{1\leqslant s<i} v_{sk}\,\partial_{w_{is}} - 2\,v_{ik}\,\partial_{w_{ii}} \\
&- \sum_{i<r\leqslant \ell} v_{rk}\,\partial_{w_{ri}} + \sum_{i<s\leqslant \ell} v_{sk}\,\partial_{w_{is}}\bigg) \qquad (1\leqslant i\leqslant \ell,\ 1\leqslant k\leqslant m),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{v_{ik}} \;=\; \partial_{v_{ik}} &+ \sum_{1\leqslant r<i} u_{rk}\,\partial_{w_{ri}} + \sum_{1\leqslant s<i} u_{sk}\,\partial_{w_{is}} + 2\,u_{ik}\,\partial_{w_{ii}} \\
&+ \sum_{i<r\leqslant \ell} u_{rk}\,\partial_{w_{ri}} - \sum_{i<s\leqslant \ell} u_{sk}\,\partial_{w_{is}} \qquad (1\leqslant i\leqslant \ell,\ 1\leqslant k\leqslant m),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IL_{v_{ik}} \;=\; \sqrt{-1}\bigg(\partial_{v_{ik}} &- \sum_{1\leqslant r<i} u_{rk}\,\partial_{w_{ri}} - \sum_{1\leqslant s<i} u_{sk}\,\partial_{w_{is}} - 2\,u_{ik}\,\partial_{w_{ii}} \\
&- \sum_{i<r\leqslant \ell} u_{rk}\,\partial_{w_{ri}} + \sum_{i<s\leqslant \ell} u_{sk}\,\partial_{w_{is}}\bigg) \qquad (1\leqslant i\leqslant \ell,\ 1\leqslant k\leqslant m).
\end{aligned}
$$

3. $\mathfrak{su}(p,q)$ CR Models : Generators of $\mathfrak{g}_0$

With the decomposition :

$$
\begin{aligned}
\big(n+m+m\big)^2 \;&=\; m^2+\tfrac{m(m-1)}{2}+\tfrac{m(m-1)}{2}+n\,m+n\,m+\tfrac{n(n-1)}{2} \\
&\quad +m^2+\tfrac{m(m-1)}{2}+\tfrac{m(m-1)}{2}+n\,m+n\,m+\tfrac{n(n-1)}{2} \\
&\quad +n+m+m,
\end{aligned}
$$

there are $6+6+3$ families of generators for $\mathfrak{g}_0$ that are independent of any $\partial_{w_{\ell'\ell''}}$.

Firstly :

$$
\begin{aligned}
L_{k_1k_2}^1 &:= \sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell'k_1}\,\partial_{u_{\ell'k_2}} - \sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell'k_2}\,\partial_{v_{\ell'k_1}} && (1\leqslant k_1,k_2\leqslant m), \\
L_{k_1k_2}^2 &:= \sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell'k_1}\,\partial_{u_{\ell'k_2}} - \sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell'k_2}\,\partial_{u_{\ell'k_1}} && (1\leqslant k_1<k_2\leqslant m), \\
L_{k_1k_2}^3 &:= \sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell'k_1}\,\partial_{v_{\ell'k_2}} - \sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell'k_2}\,\partial_{v_{\ell'k_1}} && (1\leqslant k_1<k_2\leqslant m), \\
L_{i,k}^4 &:= \sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell'k}\,\partial_{z_{\ell'i}} - \sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell'i}\,\partial_{v_{\ell'k}} && (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m), \\
L_{i,k}^5 &:= \sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell'k}\,\partial_{z_{\ell'i}} - \sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell'i}\,\partial_{u_{\ell'k}} && (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m), \\
L_{i_1,i_2}^6 &:= \sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell'i_1}\,\partial_{z_{\ell'i_2}} - \sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell'i_2}\,\partial_{z_{\ell'i_1}} && (1\leqslant i_1<i_2\leqslant n),
\end{aligned}
$$

Secondly :

$$
\begin{aligned}
IL_{k_1k_2}^1 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell' k_1}\,\partial_{u_{\ell' k_2}} + \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell' k_2}\,\partial_{v_{\ell' k_1}} && (1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant m),\\
IL_{k_1k_2}^2 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell' k_1}\,\partial_{u_{\ell' k_2}} + \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell' k_2}\,\partial_{u_{\ell' k_1}} && (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant m),\\
IL_{k_1k_2}^3 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell' k_1}\,\partial_{v_{\ell' k_2}} + \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell' k_2}\,\partial_{v_{\ell' k_1}} && (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant m),\\
IL_{i,k}^4 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell' k}\,\partial_{z_{\ell' i}} + \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell' i}\,\partial_{v_{\ell' k}} && (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m),\\
IL_{i,k}^5 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell' k}\,\partial_{z_{\ell' i}} + \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell' i}\,\partial_{u_{\ell' k}} && (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m),\\
IL_{i_1,i_2}^6 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell' i_1}\,\partial_{z_{\ell' i_2}} + \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell' i_2}\,\partial_{z_{\ell' i_1}} && (1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n),
\end{aligned}
$$

Thirdly :

$$
\begin{aligned}
IL_i^7 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} z_{\ell' i}\,\partial_{z_{\ell' i}} && (1\leqslant i\leqslant n),\\
IL_k^8 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} v_{\ell' k}\,\partial_{u_{\ell' k}} && (1\leqslant k\leqslant m),\\
IL_k^9 &:= \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell} u_{\ell' k}\,\partial_{v_{\ell' k}} && (1\leqslant k\leqslant m).
\end{aligned}
$$

In addition, there are 5 families of generators which do depend on some $\partial_{w_{\ell'\ell'}}$:

$$
\begin{aligned}
& L_{i,j} && (1\leqslant i<j\leqslant \ell),\\
& L_{i,j} && (1\leqslant j\leqslant i\leqslant \ell),\\
& IL_{i,j} && (1\leqslant i<j\leqslant \ell),\\
& IL_{i,i} && (1\leqslant i\leqslant \ell),\\
& IL_{i,j} && (1\leqslant j<i\leqslant \ell).
\end{aligned}
$$

For $1\leqslant i<j\leqslant \ell$:

$$
\begin{aligned}
L_{i,j} := & \sum_{n'=1}^{n} z_{in'}\,\partial_{z_{jn'}} + \sum_{m'=1}^{m} u_{im'}\,\partial_{u_{jm'}} + \sum_{m'=1}^{m} v_{im'}\,\partial_{v_{jm'}} \\
& + \sum_{1\leqslant s<i} w_{is}\,\partial_{w_{js}} + \sum_{i\leqslant s\leqslant j} w_{si}\,\partial_{w_{js}} + \sum_{j<s\leqslant \ell} w_{is}\,\partial_{w_{js}} \\
& + \sum_{1\leqslant r<i} w_{ri}\,\partial_{w_{rj}} - \sum_{i<r<j} w_{ir}\,\partial_{w_{rj}} + \sum_{j\leqslant r\leqslant \ell} w_{ri}\,\partial_{w_{rj}}.
\end{aligned}
$$

For $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant \ell$:

$$\begin{aligned} L_{i,j} \;:=\; & \sum_{n'=1}^{n} z_{in'}\,\partial_{z_{jn'}} + \sum_{m'=1}^{m} u_{im'}\,\partial_{u_{jm'}} + \sum_{m'=1}^{m} v_{im'}\,\partial_{v_{jm'}} \\ & + \sum_{1\leqslant s\leqslant j} w_{is}\,\partial_{w_{js}} - \sum_{j<s<i} w_{si}\,\partial_{w_{js}} + \sum_{i<s\leqslant \ell} w_{is}\,\partial_{w_{js}} \\ & + \sum_{1\leqslant r<j} w_{ri}\,\partial_{w_{rj}} + \sum_{j\leqslant r\leqslant i} w_{ir}\,\partial_{w_{rj}} + \sum_{i<r\leqslant \ell} w_{ri}\,\partial_{w_{rj}}. \end{aligned}$$

For $1 \leqslant i < j \leqslant \ell$:

$$\begin{aligned} IL_{i,j} \;:=\; & \sqrt{-1}\sum_{n'=1}^{n} z_{in'}\,\partial_{z_{jn'}} + \sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m} u_{im'}\,\partial_{u_{jm'}} + \sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m} v_{im'}\,\partial_{v_{jm'}} \\ & - \sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<i} w_{si}\,\partial_{w_{js}} + \sqrt{-1}\sum_{i<s\leqslant j} w_{is}\,\partial_{w_{js}} + \sqrt{-1}\sum_{j<s\leqslant \ell} w_{si}\,\partial_{w_{js}} \\ & - \sqrt{-1}\sum_{1\leqslant r\leqslant i} w_{ir}\,\partial_{w_{rj}} - \sqrt{-1}\sum_{i<r<j} w_{ri}\,\partial_{w_{rj}} + \sqrt{-1}\sum_{j\leqslant r\leqslant \ell} w_{ir}\,\partial_{w_{rj}}. \end{aligned}$$

For $1 \leqslant i \leqslant \ell$:

$$\begin{aligned} IL_{i,i} \;:=\; & \sqrt{-1}\sum_{n'=1}^{n} z_{in'}\,\partial_{z_{in'}} + \sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m} u_{im'}\,\partial_{u_{im'}} + \sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m} v_{im'}\,\partial_{v_{im'}} \\ & - \sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<i} w_{si}\,\partial_{w_{is}} + \sqrt{-1}\sum_{i<s\leqslant \ell} w_{si}\,\partial_{w_{is}} \\ & - \sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<i} w_{is}\,\partial_{w_{si}} + \sqrt{-1}\sum_{i<s\leqslant \ell} w_{si}\,\partial_{w_{is}}. \end{aligned}$$

For $1 \leqslant j < i \leqslant \ell$:

$$
\begin{aligned}
IL_{i,j} \, := \, & \sqrt{-1} \sum_{n'=1}^{n} z_{in'} \, \partial_{z_{jn'}} + \sqrt{-1} \sum_{m'=1}^{m} u_{im'} \, \partial_{u_{jm'}} + \sqrt{-1} \sum_{m'=1}^{m} v_{im'} \, \partial_{v_{jm'}} \\
& - \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant s \leqslant j} w_{si} \, \partial_{w_{js}} + \sqrt{-1} \sum_{j < s \leqslant i} w_{is} \, \partial_{w_{js}} + \sqrt{-1} \sum_{i < s \leqslant \ell} w_{si} \, \partial_{w_{js}} \\
& - \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < j} w_{ir} \, \partial_{w_{rj}} - \sqrt{-1} \sum_{j \leqslant r < i} w_{ri} \, \partial_{w_{rj}} + \sqrt{-1} \sum_{i < r \leqslant \ell} w_{ir} \, \partial_{w_{rj}}.
\end{aligned}
$$

4. $\mathfrak{su}(p,q)$ CR MODELS : GENERATORS OF $\mathfrak{g}_1$

There are 6 families of generators for $\mathfrak{g}_1$:

$$
\begin{aligned}
& L_{z_{ij} z_{ij}} && (1 \leqslant i \leqslant \ell, \, 1 \leqslant j \leqslant n), \\
& IL_{z_{ij} z_{ij}} && (1 \leqslant i \leqslant \ell, \, 1 \leqslant j \leqslant n), \\
& L_{u_{ik} u_{ik}} && (1 \leqslant i \leqslant \ell, \, 1 \leqslant k \leqslant m), \\
& IL_{u_{ik} u_{ik}} && (1 \leqslant i \leqslant \ell, \, 1 \leqslant k \leqslant m), \\
& L_{v_{ik} v_{ik}} && (1 \leqslant i \leqslant \ell, \, 1 \leqslant k \leqslant m), \\
& IL_{v_{ik} f_{ik}} && (1 \leqslant i \leqslant \ell, \, 1 \leqslant k \leqslant m).
\end{aligned}
$$

For $1 \leqslant i \leqslant \ell$ and $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$
\begin{aligned}
L_{z_{ij}z_{ij}} := \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq j}}^{n} \big(2\, z_{\ell' j}\, z_{in'}\big)\, \partial_{z_{\ell' n'}} \\
&+ \sum_{1 \leqslant \ell' < i} \big(2\, z_{\ell' j}\, z_{ij} - w_{\ell' i} - w_{i\ell'}\big)\, \partial_{z_{\ell' j}} + \big(2\, z_{ij}^2 - w_{ii}\big)\, \partial_{z_{ij}} + \sum_{i < \ell' \leqslant \ell} \big(2\, z_{\ell' j}\, z_{ij} - w_{\ell' i} + w_{i\ell'}\big)\, \partial_{z_{\ell' j}} \\
&+ \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{m'=1}^{m} \big(2\, z_{\ell' j}\, u_{im'}\big)\, \partial_{u_{\ell' m'}} + \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{m'=1}^{m} \big(2\, z_{\ell' j}\, u_{im'}\big)\, \partial_{v_{\ell' m'}} \\
&+ \sum_{1 \leqslant r < s < i} \Big(z_{rj}\, \big[-w_{si} + w_{is}\big] + z_{sj}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} + \sum_{1 \leqslant r < i} \Big(z_{rj}\, \big[w_{ii}\big] + z_{ij}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{ri}} \\
&+ \sum_{1 \leqslant r \leqslant i} \Big(z_{rj}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + z_{sj}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} + \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(z_{ij}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + z_{sj}\, \big[-w_{ii}\big]\Big)\, \partial_{w_{is}} \\
&+ \sum_{i < r < s \leqslant \ell} \Big(z_{rj}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + z_{sj}\, \big[-w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} \\
&+ \sum_{1 \leqslant r < i} \Big(z_{rj}\, \big[-2\, w_{ri} + 2\, w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rr}} + \Big(z_{ij}\, \big[2\, w_{ii}\big]\Big)\, \partial_{w_{ii}} + \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(z_{rj}\, \big[2\, w_{ir} + 2\, w_{ri}\big]\Big)\, \partial_{w_{rr}} \\
&+ \sum_{1 \leqslant s < r < i} \Big(z_{rj}\, \big[-w_{si} + w_{is}\big] + z_{sj}\, \big[-w_{ri} + w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} + \sum_{1 \leqslant s < i} \Big(z_{ij}\, \big[-w_{si} + w_{is}\big] + w_{sj}\, \big[w_{ii}\big]\Big)\, \partial_{w_{is}} \\
&+ \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(z_{rj}\, \big[-w_{si} + w_{is}\big] + z_{sj}\, \big[w_{ir} + w_{ri}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} + \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(z_{rj}\, \big[w_{ii}\big] + z_{ij}\, \big[w_{ir} + w_{ri}\big]\Big)\, \partial_{w_{ri}} \\
&+ \sum_{i < s < r \leqslant \ell} \Big(z_{rj}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + z_{sj}\, \big[w_{ir} + w_{ri}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}}.
\end{aligned}
$$

For $1 \leqslant i \leqslant \ell$ and $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$
\begin{aligned}
IL_{z_{ij}z_{ij}} \ := \ & \sqrt{-1} \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{\substack{n'=1 \\ n'\neq j}}^{n} \big(2\, z_{\ell' j}\, z_{in'}\big)\, \partial_{z_{\ell' n'}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{1\leqslant \ell' < i} \big(2\, z_{\ell' j}\, z_{ij} + w_{\ell' i} + w_{i \ell'}\big)\, \partial_{z_{\ell' j}} + \sqrt{-1}\, \big(2\, z_{ij}^2 + w_{ii}\big)\, \partial_{z_{ij}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{i < \ell' \leqslant \ell} \big(2\, z_{\ell' j}\, z_{ij} + w_{\ell' i} - w_{i \ell'}\big)\, \partial_{z_{\ell' j}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{m'=1}^{m} \big(2\, z_{\ell' j}\, u_{im'}\big)\, \partial_{u_{\ell' m'}} + \sqrt{-1} \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{m'=1}^{m} \big(2\, z_{\ell' j}\, u_{im'}\big)\, \partial_{v_{\ell' m'}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < s < i} \Big(z_{rj}\, \big[-w_{si} + w_{is}\big] + z_{sj}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} + \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < i} \Big(z_{rj}\, \big[w_{ii}\big] + z_{ij}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{ri}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r \leqslant i} \Big(z_{rj}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + z_{sj}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} + \sqrt{-1} \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(z_{ij}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + z_{sj}\, \big[-w_{ii}\big]\Big)\, \partial_{w_{is}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{i < r < s \leqslant \ell} \Big(z_{rj}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + z_{sj}\, \big[-w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}}
\end{aligned}
$$

$$
+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < i} \Big(z_{rj}\, \big[-2\, w_{ri} + 2\, w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rr}} + \Big(z_{ij}\, \big[2\, w_{ii}\big]\Big)\, \partial_{w_{ii}} + \sqrt{-1} \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(z_{rj}\, \big[2\, w_{ir} + 2\, w_{ri}\big]\Big)\, \partial_{w_{rr}}
$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<r<i}\Big(z_{rj}\,\big[-w_{si}+w_{is}\big]+z_{sj}\,\big[-w_{ri}+w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<i}\Big(z_{ij}\,\big[-w_{si}+w_{is}\big]+w_{sj}\,\big[w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{w_{is}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(z_{rj}\,\big[-w_{si}+w_{is}\big]+z_{sj}\,\big[w_{ir}+w_{ri}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(z_{rj}\,\big[w_{ii}\big]+z_{ij}\,\big[w_{ir}+w_{ri}\big]\Big)\,\partial_{w_{ri}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<s<r\leqslant\ell}\Big(z_{rj}\,\big[w_{is}+w_{si}\big]+z_{sj}\,\big[w_{ir}+w_{ri}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}.$$

For $1\leqslant i\leqslant\ell$ and $1\leqslant k\leqslant m$:

$$\begin{aligned}
L_{u_{ik}u_{ik}} := {} & \sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{n'=1}^{n}\big(2\,z_{in'}\,u_{\ell'k}\big)\,\partial_{z_{\ell'n'}} \\
& +\sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{m'=1}^{m}\big(2\,u_{im'}\,u_{\ell'm'}\big)\,\partial_{u_{\ell'm'}} \\
& +\sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{\substack{m'=1\\ m'\neq k}}^{m}\big(2\,u_{\ell'k}\,v_{im'}\big)\,\partial_{v_{\ell'm'}}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{1\leqslant\ell'<i}\big(2\,u_{\ell'k}\,v_{ik}-w_{\ell'i}-w_{i\ell'}\big)\,\partial_{v_{\ell'k}}+\big(2\,u_{ik}\,v_{ik}-w_{ii}\big)\,\partial_{v_{ik}}+\sum_{i<\ell'\leqslant\ell}\big(2\,u_{\ell'k}\,v_{ik}-w_{\ell'i}+w_{i\ell'}\big)\,\partial_{v_{\ell'k}}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{1 \leqslant r < s < i} \Big(u_{rk} \left[- w_{si} + w_{is} \right] + u_{sk} \left[w_{ri} - w_{ir} \right] \Big) \, \partial_{w_{rs}} + \sum_{1 \leqslant r < i} \Big(u_{rk} \left[w_{ii} \right] + u_{ik} \left[w_{ri} - w_{ir} \right] \Big) \, \partial_{w_{ri}} \\
&+ \sum_{1 \leqslant r \leqslant i} \Big(u_{rk} \left[w_{is} + w_{si} \right] + u_{sk} \left[w_{ri} - w_{ir} \right] \Big) \, \partial_{w_{rs}} + \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(u_{ik} \left[w_{is} + w_{si} \right] + u_{sk} \left[- w_{ii} \right] \Big) \, \partial_{w_{is}} \\
&+ \sum_{i < r < s \leqslant \ell} \Big(u_{rk} \left[w_{is} + w_{si} \right] + u_{sk} \left[- w_{ri} - w_{ir} \right] \Big) \, \partial_{w_{rs}}
\end{aligned}
$$

$$
+ \sum_{1 \leqslant r < i} \Big(u_{rk} \left[- 2\, w_{ri} + 2\, w_{ir} \right] \Big) \, \partial_{w_{rr}} + \Big(u_{ik} \left[2\, w_{ii} \right] \Big) \, \partial_{w_{ii}} + \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(u_{rk} \left[2\, w_{ir} + 2\, w_{ri} \right] \Big) \, \partial_{w_{rr}}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{1 \leqslant s < r < i} \Big(u_{rk} \left[- w_{si} + w_{is} \right] + u_{sk} \left[- w_{ri} + w_{ir} \right] \Big) \, \partial_{w_{rs}} + \sum_{1 \leqslant s < i} \Big(u_{ik} \left[- w_{si} + w_{is} \right] + w_{sk} \left[w_{ii} \right] \Big) \, \partial_{w_{is}} \\
&+ \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(u_{rk} \left[- w_{si} + w_{is} \right] + u_{sk} \left[w_{ir} + w_{ri} \right] \Big) \, \partial_{w_{rs}} + \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(u_{rk} \left[w_{ii} \right] + u_{ik} \left[w_{ir} + w_{ri} \right] \Big) \, \partial_{w_{ri}} \\
&+ \sum_{i < s < r \leqslant \ell} \Big(u_{rk} \left[w_{is} + w_{si} \right] + u_{sk} \left[w_{ir} + w_{ri} \right] \Big) \, \partial_{w_{rs}}.
\end{aligned}
$$

For $1 \leqslant i \leqslant \ell$ and $1 \leqslant k \leqslant m$:

$$
\begin{aligned}
IL_{u_{ik}u_{ik}} := \sqrt{-1} \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{n'=1}^{n} \big(2\, z_{in'}\, u_{\ell' k}\big)\, \partial_{z_{\ell' n'}} \\
+ \sqrt{-1} \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{m'=1}^{m} \big(2\, u_{im'}\, u_{\ell' m'}\big)\, \partial_{u_{\ell' m'}} \\
+ \sqrt{-1} \sum_{\ell'=1}^{\ell} \sum_{\substack{m'=1 \\ m' \neq k}}^{m} \big(2\, u_{\ell' k}\, v_{im'}\big)\, \partial_{v_{\ell' m'}}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{1 \leqslant \ell' < i} \big(2\, u_{\ell' k}\, v_{ik} + w_{\ell' i} + w_{i\ell'}\big)\, \partial_{v_{\ell' k}} + \sqrt{-1}\, \big(2\, u_{ik}\, v_{ik} + w_{ii}\big)\, \partial_{v_{ik}} + \sqrt{-1} \sum_{i < \ell' \leqslant \ell} \big(2\, u_{\ell' k}\, v_{ik} + w_{\ell' i} - w_{i\ell'}\big)\, \partial_{v_{\ell' k}}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < s < i} \Big(u_{rk}\, \big[-w_{si} + w_{is}\big] + u_{sk}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} + \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < i} \Big(u_{rk}\, \big[w_{ii}\big] + u_{ik}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{ri}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r \leqslant i} \Big(u_{rk}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + u_{sk}\, \big[w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}} + \sqrt{-1} \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(u_{ik}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + u_{sk}\, \big[-w_{ii}\big]\Big)\, \partial_{w_{is}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{i < r < s \leqslant \ell} \Big(u_{rk}\, \big[w_{is} + w_{si}\big] + u_{sk}\, \big[-w_{ri} - w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rs}}
\end{aligned}
$$

$$
+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < i} \Big(u_{rk}\, \big[-2\, w_{ri} + 2\, w_{ir}\big]\Big)\, \partial_{w_{rr}} + \Big(u_{ik}\, \big[2\, w_{ii}\big]\Big)\, \partial_{w_{ii}} + \sqrt{-1} \sum_{i < r \leqslant \ell} \Big(u_{rk}\, \big[2\, w_{ir} + 2\, w_{ri}\big]\Big)\, \partial_{w_{rr}}
$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<r<i}\Big(u_{rk}\left[-w_{si}+w_{is}\right]+u_{sk}\left[-w_{ri}+w_{ir}\right]\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<i}\Big(u_{ik}\left[-w_{si}+w_{is}\right]+w_{sk}\left[w_{ii}\right]\Big)\,\partial_{w_{is}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(u_{rk}\left[-w_{si}+w_{is}\right]+u_{sk}\left[w_{ir}+w_{ri}\right]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(u_{rk}\left[w_{ii}\right]+u_{ik}\left[w_{ir}+w_{ri}\right]\Big)\,\partial_{w_{ri}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<s<r\leqslant\ell}\Big(u_{rk}\left[w_{is}+w_{si}\right]+u_{sk}\left[w_{ir}+w_{ri}\right]\Big)\,\partial_{w_{rs}}.$$

For $1\leqslant i\leqslant\ell$ and $1\leqslant k\leqslant m$:

$$\begin{aligned}
L_{v_{ik}v_{ik}} \;:=\; & \sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{n'=1}^{n}\big(2\,z_{in'}\,v_{\ell'k}\big)\,\partial_{z_{\ell'n'}} \\
& +\sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{m'=1}^{m}\big(2\,v_{im'}\,v_{\ell'm'}\big)\,\partial_{v_{\ell'm'}} \\
& +\sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{\substack{m'=1\\ m'\neq k}}^{m}\big(2\,v_{\ell'k}\,v_{im'}\big)\,\partial_{v_{\ell'm'}}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{1\leqslant\ell'<i}\big(2\,v_{\ell'k}\,v_{ik}-w_{\ell'i}-w_{i\ell'}\big)\,\partial_{v_{\ell'k}}+\big(2\,v_{ik}\,v_{ik}-w_{ii}\big)\,\partial_{v_{ik}}+\sum_{i<\ell'\leqslant\ell}\big(2\,v_{\ell'k}\,v_{ik}-w_{\ell'i}+w_{i\ell'}\big)\,\partial_{v_{\ell'k}}$$

$$+\sum_{1\leqslant r<s<i}\Big(v_{rk}\,\big[-w_{si}+w_{is}\big]+v_{sk}\,\big[w_{ri}-w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sum_{1\leqslant r<i}\Big(v_{rk}\,\big[w_{ii}\big]+v_{ik}\,\big[w_{ri}-w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{ri}}$$
$$+\sum_{1\leqslant r\leqslant i}\Big(v_{rk}\,\big[w_{is}+w_{si}\big]+v_{sk}\,\big[w_{ri}-w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(v_{ik}\,\big[w_{is}+w_{si}\big]+v_{sk}\,\big[-w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{w_{is}}$$
$$+\sum_{i<r<s\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\,\big[w_{is}+w_{si}\big]+v_{sk}\,\big[-w_{ri}-w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sum_{1\leqslant r<i}\Big(v_{rk}\,\big[-2\,w_{ri}+2\,w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rr}}+\Big(v_{ik}\,\big[2\,w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{w_{ii}}+\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\,\big[2\,w_{ir}+2\,w_{ri}\big]\Big)\,\partial_{w_{rr}}$$

$$+\sum_{1\leqslant s<r<i}\Big(v_{rk}\,\big[-w_{si}+w_{is}\big]+v_{sk}\,\big[-w_{ri}+w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sum_{1\leqslant s<i}\Big(v_{ik}\,\big[-w_{si}+w_{is}\big]+w_{sk}\,\big[w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{w_{is}}$$
$$+\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\,\big[-w_{si}+w_{is}\big]+v_{sk}\,\big[w_{ir}+w_{ri}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\,\big[w_{ii}\big]+v_{ik}\,\big[w_{ir}+w_{ri}\big]\Big)\,\partial_{w_{ri}}$$
$$+\sum_{i<s<r\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\,\big[w_{is}+w_{si}\big]+v_{sk}\,\big[w_{ir}+w_{ri}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}.$$

For $1 \leqslant i \leqslant \ell$ and $1 \leqslant k \leqslant m$:

$$
\begin{aligned}
IL_{v_{ik}v_{ik}} \;:=\; & \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{n'=1}^{n}\big(2\,z_{in'}\,v_{\ell'k}\big)\,\partial_{z_{\ell'n'}} \\
& + \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{m'=1}^{m}\big(2\,v_{im'}\,v_{\ell'm'}\big)\,\partial_{v_{\ell'm'}} \\
& + \sqrt{-1}\sum_{\ell'=1}^{\ell}\sum_{\substack{m'=1\\ m'\neq k}}^{m}\big(2\,v_{\ell'k}\,v_{im'}\big)\,\partial_{v_{\ell'm'}}
\end{aligned}
$$

$$
1\sum_{1\leqslant\ell'<i}\big(2\,v_{\ell'k}\,v_{ik}+w_{\ell'i}+w_{i\ell'}\big)\,\partial_{v_{\ell'k}}+\sqrt{-1}\,\big(2\,v_{ik}\,v_{ik}+w_{ii}\big)\,\partial_{v_{ik}}+\sqrt{-1}\sum_{i<\ell'\leqslant\ell}\big(2\,v_{\ell'k}\,v_{ik}+w_{\ell'i}-w_{i\ell'}\big)\,\partial_{v_{\ell'k}}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \sqrt{-1}\sum_{1\leqslant r<s<i}\Big(v_{rk}\,\big[-w_{si}+w_{is}\big]+v_{sk}\,\big[w_{ri}-w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant r<i}\Big(v_{rk}\,\big[w_{ii}\big]+v_{ik}\,\big[w_{ri}-w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{ri}} \\
& + \sqrt{-1}\sum_{1\leqslant r\leqslant i}\Big(v_{rk}\,\big[w_{is}+w_{si}\big]+v_{sk}\,\big[w_{ri}-w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(v_{ik}\,\big[w_{is}+w_{si}\big]+v_{sk}\,\big[-w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{w_{is}} \\
& + \sqrt{-1}\sum_{i<r<s\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\,\big[w_{is}+w_{si}\big]+v_{sk}\,\big[-w_{ri}-w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rs}}
\end{aligned}
$$

$$
+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant r<i}\Big(v_{rk}\,\big[-2\,w_{ri}+2\,w_{ir}\big]\Big)\,\partial_{w_{rr}}+\Big(v_{ik}\,\big[2\,w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{w_{ii}}+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\,\big[2\,w_{ir}+2\,w_{ri}\big]\Big)\,\partial_{w_{rr}}
$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<r<i}\Big(v_{rk}\left[-w_{si}+w_{is}\right]+v_{sk}\left[-w_{ri}+w_{ir}\right]\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<i}\Big(v_{ik}\left[-w_{si}+w_{is}\right]+w_{sk}\left[w_{ii}\right]\Big)\,\partial_{w_{is}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\left[-w_{si}+w_{is}\right]+v_{sk}\left[w_{ir}+w_{ri}\right]\Big)\,\partial_{w_{rs}}+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\left[w_{ii}\right]+v_{ik}\left[w_{ir}+w_{ri}\right]\Big)\,\partial_{w_{ri}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<s<r\leqslant\ell}\Big(v_{rk}\left[w_{is}+w_{si}\right]+v_{sk}\left[w_{ir}+w_{ri}\right]\Big)\,\partial_{w_{rs}}.$$

5. $\mathfrak{su}(p,q)$ CR Models : Generators of $\mathfrak{g}_2$

There are 3 families of generators for $\mathfrak{g}_2$:

$$\begin{aligned}
&L_{w_{ij}w_{ij}} && (1\leqslant i<j\leqslant\ell),\\
&L_{w_{ii}w_{ii}} && (1\leqslant i\leqslant\ell),\\
&IL_{w_{ij}w_{ij}} && (1\leqslant i>j\leqslant\ell).
\end{aligned}$$

For $1 \leqslant i < j \leqslant \ell$:

$$
\begin{aligned}
L_{w_{ij} w_{ij}} := & \sum_{1 \leqslant \ell' < i} \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \big[w_{j\ell'} + w_{\ell' j} \big] + z_{jn'} \big[- w_{i\ell'} - w_{\ell' i} \big] \Big) \, \partial_{z_{\ell' n'}} \\
& + \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \big[w_{ij} + w_{ji} \big] + z_{jn'} \big[- w_{ii} \big] \Big) \, \partial_{z_{in'}} \\
& + \sum_{i < \ell' < j} \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \big[w_{j\ell'} + w_{\ell' j} \big] + z_{jn'} \big[w_{i\ell'} - w_{\ell' i} \big] \Big) \, \partial_{z_{\ell' n'}} \\
& + \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \big[w_{jj} \big] + z_{jn'} \big[w_{ij} - w_{ji} \big] \Big) \, \partial_{z_{jn'}} \\
& + \sum_{j < \ell' \leqslant \ell} \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \big[- w_{j\ell'} + w_{\ell' j} \big] + z_{jn'} \big[w_{i\ell'} - w_{\ell' i} \big] \Big) \, \partial_{z_{\ell' n'}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{1\leqslant \ell'<i} \sum_{m'=1}^{m} \Big(u_{im'}\big[w_{j\ell'} + w_{\ell' j}\big] + u_{jm'}\big[-w_{i\ell'} - w_{\ell' i}\big]\Big)\,\partial_{u_{\ell' m'}} \\
&\quad + \sum_{m'=1}^{m} \Big(u_{im'}\big[w_{ij} + w_{ji}\big] + u_{jm'}\big[-w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{u_{im'}} \\
&\quad + \sum_{i<\ell'<j} \sum_{m'=1}^{m} \Big(u_{im'}\big[w_{j\ell'} + w_{\ell' j}\big] + u_{jm'}\big[w_{i\ell'} - w_{\ell' i}\big]\Big)\,\partial_{u_{\ell' m'}} \\
&\quad + \sum_{m'=1}^{m} \Big(u_{im'}\big[w_{jj}\big] + u_{jm'}\big[w_{ij} - w_{ji}\big]\Big)\,\partial_{u_{jm'}} \\
&\quad + \sum_{j<\ell'\leqslant \ell} \sum_{m'=1}^{m} \Big(u_{im'}\big[-w_{j\ell'} + w_{\ell' j}\big] + u_{jm'}\big[w_{i\ell'} - w_{\ell' i}\big]\Big)\,\partial_{u_{\ell' m'}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{1\leqslant \ell'<i} \sum_{m'=1}^{m} \Big(v_{im'}\big[w_{j\ell'} + w_{\ell' j}\big] + v_{jm'}\big[-w_{i\ell'} - w_{\ell' i}\big]\Big)\,\partial_{v_{\ell' m'}} \\
&\quad + \sum_{m'=1}^{m} \Big(v_{im'}\big[w_{ij} + w_{ji}\big] + v_{jm'}\big[-w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{v_{im'}} \\
&\quad + \sum_{i<\ell'<j} \sum_{m'=1}^{m} \Big(v_{im'}\big[w_{j\ell'} + w_{\ell' j}\big] + v_{jm'}\big[w_{i\ell'} - w_{\ell' i}\big]\Big)\,\partial_{v_{\ell' m'}} \\
&\quad + \sum_{m'=1}^{m} \Big(v_{im'}\big[w_{jj}\big] + v_{jm'}\big[w_{ij} - w_{ji}\big]\Big)\,\partial_{v_{jm'}} \\
&\quad + \sum_{j<\ell'\leqslant \ell} \sum_{m'=1}^{m} \Big(v_{im'}\big[-w_{j\ell'} + w_{\ell' j}\big] + v_{jm'}\big[w_{i\ell'} - w_{\ell' i}\big]\Big)\,\partial_{v_{\ell' m'}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{1\leqslant r<i}\big(-2\,w_{ri}\,w_{jr}+2\,w_{rj}\,w_{ir}\big)\,\partial_{w_{rr}}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant r<i}\big(w_{ri}\,w_{ij}-w_{ir}\,w_{ji}+w_{ii}\,w_{jr}\big)\,\partial_{w_{ri}}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant r<i}\big(w_{rj}\,w_{ij}-w_{ir}\,w_{jj}+w_{ji}\,w_{jr}\big)\,\partial_{w_{rj}}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant s<i}\big(-w_{si}\,w_{ji}+w_{sj}\,w_{ii}+w_{is}\,w_{ij}\big)\,\partial_{w_{is}}\\
&\quad+\big(2\,w_{ii}\,w_{ij}\big)\,\partial_{w_{ii}}\\
&\quad+\sum_{i<s<j}\big(-w_{ii}\,w_{js}+w_{is}\,w_{ij}+w_{si}\,w_{ji}\big)\,\partial_{w_{is}}\\
&\quad+\big(-w_{ii}\,w_{jj}+w_{ij}^2+w_{ji}^2\big)\,\partial_{w_{ij}}
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{j<s\leqslant\ell}\big(-w_{ii}\,w_{sj}+w_{ij}\,w_{is}+w_{ji}\,w_{si}\big)\,\partial_{w_{is}}$$

$$+\sum_{i<r<j}\big(w_{ii}\,w_{rj}+w_{ji}\,w_{ir}+w_{ij}\,w_{ri}\big)\,\partial_{w_{ri}}$$

$$+\sum_{i<r<j}\big(2\,w_{ir}\,w_{jr}+2\,w_{ri}\,w_{rj}\big)\,\partial_{w_{rr}}$$

$$+\sum_{i<r<j}\big(w_{ij}\,w_{rj}-w_{ri}\,w_{jj}+w_{ji}\,w_{jr}\big)\,\partial_{w_{rj}}$$

$$+\sum_{1\leqslant s<i}\big(-w_{si}\,w_{jj}+w_{sj}\,w_{ji}+w_{ij}\,w_{js}\big)\,\partial_{w_{js}}$$

$$+\big(2\,w_{ij}\,w_{ji}\big)\,\partial_{w_{ji}}$$

$$+\sum_{i<s<j}\big(w_{is}\,w_{jj}+w_{ij}\,w_{js}+w_{sj}\,w_{ji}\big)\,\partial_{w_{js}}$$

$$+\big(2\,w_{ij}\,w_{jj}\big)\,\partial_{w_{jj}}$$

$$+\sum_{j<s\leqslant\ell}\big(w_{ij}\,w_{js}-w_{ji}\,w_{sj}+w_{jj}\,w_{si}\big)\,\partial_{w_{js}}$$

$$+\sum_{j<r\leqslant\ell}\big(-w_{ii}\,w_{jr}+w_{ij}\,w_{ri}+w_{ir}\,w_{ji}\big)\,\partial_{w_{ri}}$$

$$+\sum_{j<r\leqslant\ell}\big(w_{ij}\,w_{rj}+w_{ir}\,w_{jj}-w_{ji}\,w_{jr}\big)\,\partial_{w_{rj}}$$

$$+\sum_{j<r\leqslant\ell}\big(2\,w_{ir}\,w_{rj}-2\,w_{jr}\,w_{ri}\big)\,\partial_{w_{rr}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{1\leqslant s<r<i}\Big(-w_{si}\,w_{jr}+w_{sj}\,w_{ir}-w_{ri}\,w_{js}+w_{rj}\,w_{is}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant r<s<i}\Big(w_{ri}\,w_{sj}-w_{rj}\,w_{si}-w_{ir}\,w_{js}+w_{is}\,w_{jr}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant r<i}\;\sum_{i<s<j}\Big(w_{ri}\,w_{sj}+w_{rj}\,w_{is}-w_{ir}\,w_{js}+w_{si}\,w_{jr}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sum_{1\leqslant r<i}\;\sum_{j<s\leqslant\ell}\Big(-w_{ri}\,w_{js}+w_{rj}\,w_{is}-w_{ir}\,w_{sj}+w_{jr}\,w_{si}\Big)\,\partial_{w_{rs}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i<r<j}\;\sum_{1\leqslant s<i}\Big(-w_{si}\,w_{jr}+w_{sj}\,w_{ri}+w_{is}\,w_{rj}+w_{ir}\,w_{js}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sum_{i<s<r<j}\Big(w_{is}\,w_{jr}+w_{ir}\,w_{js}+w_{si}\,w_{rj}+w_{sj}\,w_{ri}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sum_{i<r<s<j}\Big(-w_{ir}\,w_{sj}+w_{is}\,w_{rj}-w_{ri}\,w_{js}+w_{si}\,w_{jr}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sum_{i<r<j}\;\sum_{j<s\leqslant\ell}\Big(w_{ir}\,w_{js}+w_{is}\,w_{rj}-w_{ri}\,w_{sj}+w_{jr}\,w_{si}\Big)\,\partial_{w_{rs}}
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{j<r\leqslant\ell}\,\sum_{1\leqslant s<i}\Big(-w_{si}\,w_{rj}+w_{sj}\,w_{ri}-w_{is}\,w_{jr}+w_{ir}\,w_{js}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sum_{j<r\leqslant\ell}\,\sum_{i<s<j}\Big(w_{is}\,w_{rj}+w_{ir}\,w_{js}-w_{si}\,w_{jr}+w_{sj}\,w_{ri}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sum_{j<s<r\leqslant\ell}\Big(w_{is}\,w_{rj}+w_{ir}\,w_{sj}-w_{js}\,w_{ri}-w_{jr}\,w_{si}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sum_{j<r<s\leqslant\ell}\Big(w_{ir}\,w_{js}-w_{is}\,w_{jr}-w_{ri}\,w_{sj}+w_{rj}\,w_{si}\Big)\,\partial_{w_{rs}}.$$

For $1\leqslant i\leqslant\ell$:

$$IL_{w_{ii}w_{ii}}\;:=\;\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant\ell'<i}\,\sum_{n'=1}^{n}z_{in'}\,\big(w_{\ell'i}+w_{i\ell'}\big)\,\partial_{z_{\ell'n'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{n'=1}^{n}z_{in'}\,w_{ii}\,\partial_{z_{in'}}$$

$$\sqrt{-1}\sum_{i<\ell'\leqslant\ell}\,\sum_{n'=1}^{n}z_{in'}\,\big(w_{\ell'i}-w_{i\ell'}\big)\,\partial_{z_{\ell'n'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant\ell'<i}\sum_{m'=1}^{m}u_{im'}\left(w_{\ell' i}+w_{i\ell'}\right)\partial_{u_{\ell' m'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m}u_{im'}\,w_{ii}\,\partial_{u_{im'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<\ell'\leqslant\ell}\sum_{m'=1}^{m}u_{im'}\left(w_{\ell' i}-w_{i\ell'}\right)\partial_{u_{\ell' m'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant\ell'<i}\sum_{m'=1}^{m}v_{im'}\left(w_{\ell' i}+w_{i\ell'}\right)\partial_{v_{\ell' m'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m}v_{im'}\,w_{ii}\,\partial_{v_{im'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<\ell'\leqslant\ell}\sum_{m'=1}^{m}v_{im'}\left(w_{\ell' i}-w_{i\ell'}\right)\partial_{v_{\ell' m'}}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < i} \big(- w_{ri}^2 + w_{ir}^2 \big) \, \partial_{w_{rr}} \\
&+ \sqrt{-1} \, w_{ii} \, w_{ii} \, \partial_{w_{ii}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{i < r \leqslant \ell} \big(w_{ri}^2 - w_{ir}^2 \big) \, \partial_{w_{rr}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant s < i} w_{is} \, w_{ii} \, \partial_{w_{is}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{i < s \leqslant \ell} w_{is} \, w_{ii} \, \partial_{w_{is}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < i} w_{ri} \, w_{ii} \, \partial_{w_{ri}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{i < r \leqslant \ell} w_{ri} \, w_{ii} \, \partial_{w_{ri}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < s < i} \big(w_{ri}\, w_{is} - w_{si}\, w_{ir} \big)\, \partial_{w_{rs}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant s < r < i} \big(- w_{si}\, w_{ri} + w_{is}\, w_{ir} \big)\, \partial_{w_{rs}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{i < r < s \leqslant \ell} \big(- w_{ir}\, w_{si} + w_{is}\, w_{ri} \big)\, \partial_{w_{rs}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{i < s < r \leqslant \ell} \big(- w_{is}\, w_{ir} + w_{si}\, w_{ri} \big)\, \partial_{w_{rs}} \\
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < i} \sum_{i < s \leqslant \ell} \big(w_{ri}\, w_{si} + w_{ir}\, w_{is} \big)\, \partial_{w_{rs}} \\
&+ \sum_{i < r \leqslant \ell} \sum_{1 \leqslant s < i} \big(w_{si}\, w_{ir} + w_{is}\, w_{ri} \big)\, \partial_{w_{rs}}.
\end{aligned}
$$

For $1 \leqslant j < i \leqslant \ell$:

$$
\begin{aligned}
IL_{w_{ij}w_{ij}} \ := \ & \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant \ell' < j} \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \left[w_{\ell' j} + w_{j \ell'} \right] + z_{jn'} \left[w_{\ell' i} + w_{i \ell'} \right] \Big) \, \partial_{z_{\ell' n'}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \left[w_{jj} \right] + z_{jn'} \left[w_{ji} + w_{ij} \right] \Big) \, \partial_{z_{jn'}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{j < \ell' < i} \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \left[- w_{j \ell'} + w_{\ell' j} \right] + z_{jn'} \left[w_{\ell' i} + w_{i \ell'} \right] \Big) \, \partial_{z_{\ell' n'}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \left[w_{ij} - w_{ji} \right] + z_{jn'} \left[w_{ii} \right] \Big) \, \partial_{z_{in'}} \\
& + \sqrt{-1} \sum_{i < \ell' \leqslant \ell} \sum_{n'=1}^{n} \Big(z_{in'} \left[- w_{j \ell'} + w_{\ell' j} \right] + z_{jn'} \left[- w_{i \ell'} + w_{\ell' i} \right] \Big) \, \partial_{z_{\ell' n'}}
\end{aligned}
$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant\ell'<j}\sum_{m'=1}^{m}\Big(u_{in'}\,\big[w_{\ell' j}+w_{j\ell'}\big]+u_{jm'}\,\big[w_{\ell' i}+w_{i\ell'}\big]\Big)\,\partial_{u_{\ell' m'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m}\Big(u_{im'}\,\big[w_{jj}\big]+u_{jm'}\,\big[w_{ji}+w_{ij}\big]\Big)\,\partial_{u_{jm'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<\ell'<i}\sum_{m'=1}^{m}\Big(u_{im'}\,\big[-w_{j\ell'}+w_{\ell' j}\big]+u_{jm'}\,\big[w_{\ell' i}+w_{i\ell'}\big]\Big)\,\partial_{u_{\ell' m'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m}\Big(u_{im'}\,\big[w_{ij}-w_{ji}\big]+u_{jm'}\big[w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{u_{im'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<\ell'\leqslant\ell}\sum_{m'=1}^{m}\Big(u_{im'}\,\big[-w_{j\ell'}+w_{\ell' j}\big]+u_{jm'}\,\big[-w_{i\ell'}+w_{\ell' i}\big]\Big)\,\partial_{u_{\ell' m'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant \ell'<j}\sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{in'}\,\big[w_{\ell' j}+w_{j\ell'}\big]+v_{jm'}\,\big[w_{\ell' i}+w_{i\ell'}\big]\Big)\,\partial_{v_{\ell' m'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\,\big[w_{jj}\big]+v_{jm'}\,\big[w_{ji}+w_{ij}\big]\Big)\,\partial_{v_{jm'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<\ell'<i}\sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\,\big[-w_{j\ell'}+w_{\ell' j}\big]+v_{jm'}\,\big[w_{\ell' i}+w_{i\ell'}\big]\Big)\,\partial_{v_{\ell' m'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\,\big[w_{ij}-w_{ji}\big]+v_{jm'}\big[w_{ii}\big]\Big)\,\partial_{v_{im'}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<\ell'\leqslant \ell}\sum_{m'=1}^{m}\Big(v_{im'}\,\big[-w_{j\ell'}+w_{\ell' j}\big]+v_{jm'}\,\big[-w_{i\ell'}+w_{\ell' i}\big]\Big)\,\partial_{v_{\ell' m'}}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < j} \big(-2\, w_{rj}\, w_{ri} + 2\, w_{jr}\, w_{ir} \big)\, \partial_{w_{rr}} \\
&\quad + \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < j} \big(w_{rj}\, w_{ij} + w_{ri}\, w_{jj} - w_{jr}\, w_{ji} \big)\, \partial_{w_{rj}} \\
&\quad + \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant r < j} \big(w_{rj}\, w_{ii} + w_{ri}\, w_{ij} + w_{ji}\, w_{ir} \big)\, \partial_{w_{ri}} \\
&\quad + \sqrt{-1} \sum_{1 \leqslant s < j} \big(-w_{sj}\, w_{ji} + w_{js}\, w_{ij} + w_{jj}\, w_{is} \big)\, \partial_{w_{js}} \\
&\quad + \sqrt{-1} \big(2\, w_{jj}\, w_{ji} \big)\, \partial_{w_{jj}} \\
&\quad + \sqrt{-1} \sum_{j < s < i} \big(-w_{jj}\, w_{si} + w_{js}\, w_{ij} + w_{ji}\, w_{sj} \big)\, \partial_{w_{js}} \\
&\quad + \sqrt{-1} \big(2\, w_{ij}\, w_{ji} \big)\, \partial_{w_{ji}}
\end{aligned}
$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<s\leqslant\ell}\big(w_{jj}\,w_{is}+w_{ji}\,w_{sj}+w_{js}\,w_{ij}\big)\,\partial_{w_{js}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<r<i}\big(w_{jj}\,w_{ir}+w_{jr}\,w_{ji}+w_{rj}\,w_{ij}\big)\,\partial_{w_{rj}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<r<i}\big(2\,w_{jr}\,w_{ri}+2\,w_{rj}\,w_{ir}\big)\,\partial_{w_{rr}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<r<i}\big(-w_{jr}\,w_{ii}+w_{ji}\,w_{ir}+w_{ri}\,w_{ij}\big)\,\partial_{w_{ri}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<j}\big(w_{si}\,w_{ji}+w_{js}\,w_{ii}+w_{is}\,w_{ij}\big)\,\partial_{w_{is}}$$

$$+\sqrt{-1}\big(w_{jj}\,w_{ii}+w_{ij}^2+w_{ji}^2\big)\,\partial_{w_{ij}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<s<i}\big(w_{ji}\,w_{si}+w_{sj}\,w_{ii}+w_{ij}\,w_{is}\big)\,\partial_{w_{is}}$$

$$+\sqrt{-1}\big(2\,w_{ij}\,w_{ii}\big)\,\partial_{w_{ii}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<s\leqslant\ell}\big(-w_{ji}\,w_{si}+w_{js}\,w_{ii}+w_{ij}\,w_{is}\big)\,\partial_{w_{is}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\big(w_{jj}\,w_{ri}+w_{ji}\,w_{jr}+w_{ij}\,w_{rj}\big)\,\partial_{w_{rj}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\big(-w_{ji}\,w_{ir}+w_{ij}\,w_{ri}+w_{ii}\,w_{rj}\big)\,\partial_{w_{ri}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\big(-2\,w_{jr}\,w_{ir}+2\,w_{rj}\,w_{ri}\big)\,\partial_{w_{rr}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant s<r<j}\Big(-w_{sj}\,w_{ri}-w_{si}\,w_{rj}+w_{js}\,w_{ir}+w_{jr}\,w_{is}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant r<s<j}\Big(w_{rj}\,w_{is}+w_{ri}\,w_{js}-w_{sj}\,w_{ir}-w_{si}\,w_{jr}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant r<j}\sum_{j<s<i}\Big(w_{rj}\,w_{is}+w_{ri}\,w_{sj}-w_{jr}\,w_{si}+w_{js}\,w_{ir}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{1\leqslant r<j}\sum_{i<s\leqslant\ell}\Big(w_{rj}\,w_{si}+w_{ri}\,w_{sj}+w_{is}\,w_{jr}+w_{js}\,w_{ir}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<r<i}\sum_{1\leqslant s<j}\Big(-w_{sj}\,w_{ri}+w_{si}\,w_{jr}+w_{js}\,w_{ir}+w_{rj}\,w_{is}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<s<r<i}\Big(w_{js}\,w_{ri}+w_{jr}\,w_{si}+w_{sj}\,w_{ir}+w_{rj}\,w_{is}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<r<s<i}\Big(-w_{jr}\,w_{is}+w_{js}\,w_{ir}-w_{rj}\,w_{si}+w_{ri}\,w_{sj}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{j<r<i}\sum_{i<s\leqslant\ell}\Big(-w_{jr}\,w_{si}+w_{js}\,w_{ir}+w_{is}\,w_{rj}+w_{ri}\,w_{sj}\Big)\,\partial_{w_{rs}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\ \sum_{1\leqslant s<j}\Big(w_{sj}\,w_{ir}+w_{si}\,w_{jr}+w_{ri}\,w_{js}+w_{is}\,w_{rj}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sqrt{-1}\sum_{i<r\leqslant\ell}\ \sum_{j<s<i}\Big(-w_{js}\,w_{ir}+w_{jr}\,w_{si}+w_{sj}\,w_{ri}+w_{is}\,w_{rj}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sqrt{-1}\sum_{i<s<r\leqslant\ell}\Big(-w_{js}\,w_{ir}-w_{jr}\,w_{is}+w_{sj}\,w_{ri}+w_{si}\,w_{rj}\Big)\,\partial_{w_{rs}}\\
&\quad+\sqrt{-1}\sum_{i<r<s\leqslant\ell}\Big(-w_{jr}\,w_{si}+w_{js}\,w_{ri}-w_{ir}\,w_{sj}+w_{is}\,w_{rj}\Big)\,\partial_{w_{rs}}.
\end{aligned}
$$

Conclusion : Trésors et Résurgences

- **Liberté ouverte hors-monde.**
- **Renaissance.**
- **Travaux déjà réalisés auparavant.**
- **Future obsolescence (programmée ?)**
- **Patrimoine : mourant ? vivant ?**
- **Mathématiciens : historiens ? philosophes ?**