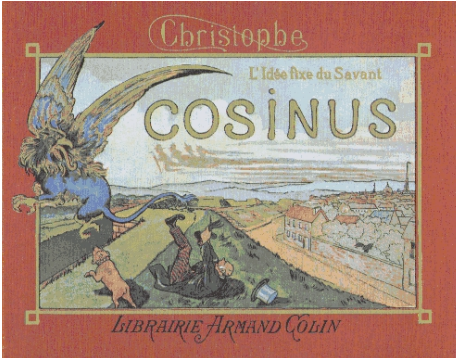
# Quelques inattendus mathématiques: Crises, Chaos et Stabilité

Jérôme Buzzi (CNRS & Université Paris-Sud)
http://jbuzzi.wordpress.com

Centre d'Alembert
17 novembre 2010
Université Paris Sud

# Avertissement

De tout temps... les catastrophes ont eu une affinité pour les mathématiciens:




Mais cela s'inverse!

# Du continu au discret

## Quelques exemples liés aux systèmes dynamiques

*Rien n'est simple...*

1. **Théorie des catastrophes**

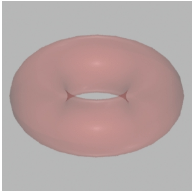
*Tout se complique...*

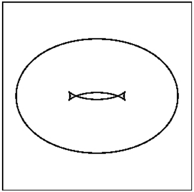
2. **Dynamique hyperboliques**
   2.1 Instabilité exponentielle des trajectoires
   2.2 Stabilité globale
3. **Théorie dynamique générale...** sur l'intervalle!
   3.1 point de vue topologique
   3.2 point de vue probabiliste
4. **Crises dans les systèmes dynamiques**
   4.1 Crises persistantes
   4.2 Crises fructueuses

# Théorie des catastrophes

**But:** Etude des singularités des projections des formes lisses en position génerale

**Situation:** Projection d'une surface de l'espace sur un plan:

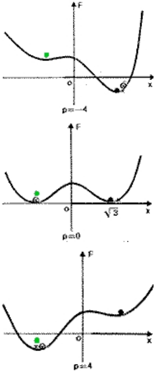




H. Whitney (1907-1989): plis ou fronces seulement! (en général)

# Théorie des catastrophes

**Situation:** Saut du minimum d'un potentiel lors de la variation des paramètres




configuration locale "unique" avec un seul paramètre: $V_t(x) = x^3 + tx$

# Théorie de classification

**Situation:** Saut du minimum d'un potentiel lors de la variation des paramètres

### Théorème (R. Thom (1923-2002))

*Dans les systèmes dépendant d'au plus 5 paramètres il n'y a qu'un nombre fini de situations locales qualitativement distinctes. Ce n'est pas vrai en dimension supérieure*

# Théorème de classification

**Sept** formes normales de bifurcation à au plus 4 paramètre

- pli: $V_a(x) = x^3 + ax$
- fronce : $V_{a,b}(x) = x^4 + ax^2 + bx$
- queue d'aronde : $V_{a,b,c}(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx$
- ombilic hyperbolique : $V_{a,b,c}(x, y) = x^3 + y^3 + axy + bx + cy$
- — elliptique : $V_{a,b,c}(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy$
- papillon : $V_{a,b,c,d}(x, y) = x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$
- ombilic parabolique :
  $V_{a,b,c,d}(x, y) = x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$

Il y en a a **onze** en tout pour 5 paramètres.
**Mais une infinité** qualitativement distinctes pour 6 paramètres ou plus

# Limites de la théorie des catastrophes

- qualitatif
- petit nombre de paramètres
- **dynamiques très restreintes!**

# Définition et exemples

## Définition (D. Anosov (né 1936))

*Dynamique hyperbolique: toute direction est exponentiellement contractée ou dilatée*

**Remarque** condition *robuste* donc observable

**Exemple.** Tout point fixe attractif, répulsif ou de type selle

**Contre-exemple.** Un point fixe de type centre

**Exemple.** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$ modulo 1 sur $[0,1]^2$

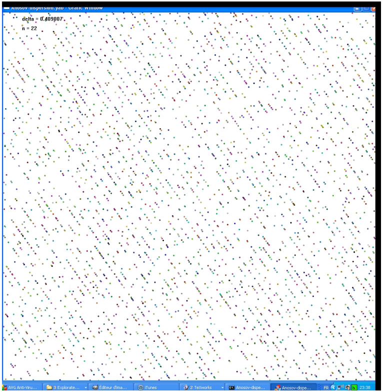
**Exemple.** Mouvement libre sur une surface à courbure négative

**Exemple.** Fers à cheval de Smale inclus dans beaucoup de systèmes

# Instabilité exponentielle des trajectoires individuelles

Par définition, **toute incertitude croît exponentiellement vite.**
Prévision individuelle **impossible**

**Exemple** $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$, $\Delta x \approx 10^{-10}, N = 22$



# Prévisibilité stochastique

Méta-Théorème Pour une dynamique $T$ suffisamment hyperbolique et une observable $f$ suffisamment régulière, le processus:

$$X_0 = f,\ X_1 = f \circ T,\ X_2 = f \circ T^2, \dots,\ X_n = f \circ T^n, \dots$$

sous la loi uniforme a les **mêmes propriétés statistiques** qu'une suite de variables i.i.d. bornées:

- loi forte des grands nombres (théorème ergodique)
- théorème central limite
- principe d'invariance
- ...

*La condition initiale,* **pourvu qu'elle soit choisie au hasard**, *n'intervient plus!*

# Stabilité topologique

### Théorème (D. Anosov, S. Smale, C. Robinson)

*Une dynamique hyperbolique est topologiquement stable*

### Théorème

*(R. Adler, B. Marcus, Ya. Sinai, R. Bowen) Une dynamique hyperbolique correspond à un* **graphe fini**

**Observation:** Le désordre total est simple!

# Chaos et Stabilité

## Théorème (R. Mañé, Hayashi)

*Une dynamique topologiquement stable est* **nécessairement** *hyperbolique*

# Stabilité statistique

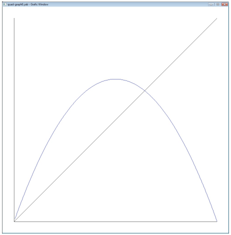
### Théorème (L.-S. Young)

*La mesure décrivant la statistique de presque toutes les orbites d'un système hyperbolique varie continûment sous l'effet d'une perturbation déterministe ou stochastique.*

# Une famille célèbre

## Définition

*La famille quadratique:* $Q_a(x) = 4ax(1-x)$ *sur* $[0,1]$ *pour* $0 \leq a \leq 1$

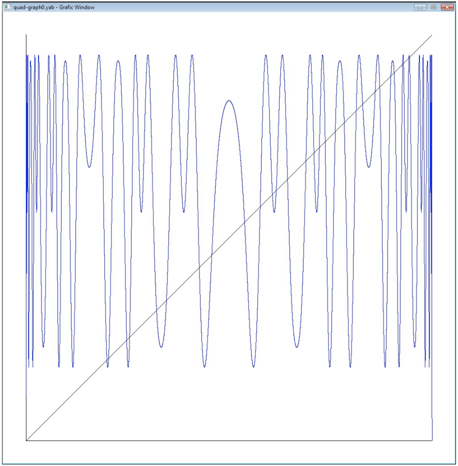


## Remarques:

- Dimension 1
- Combinaison d'expansion et de points critiques
- Analyticité

# Complexité de l'itération

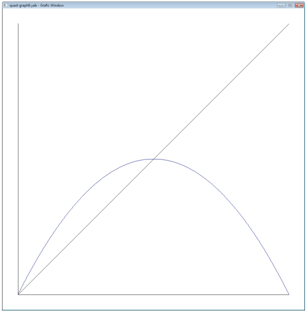
Algébriquement: $d^0(Q_a^n) = 2^n$




Graphe de $Q_a^7$ $(a = 0.95)$

# Deux comportements

**Exemple 1:** $a = 0.5$



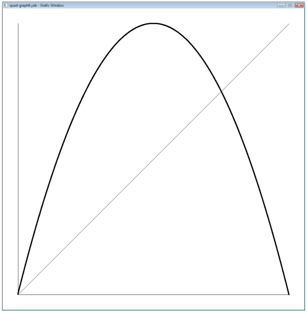
Graphe de $Q_{1/2}(x) = 2x(1-x)$

## Proposition

*Tous les points (sauf deux) convergent vers* $1/2$*:* **comportement périodique stable**

# Deux comportements

**Exemple 2:** $a = 1$

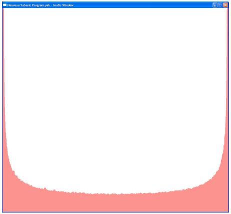



Graphe de $Q_1(x) = 4x(1 - x)$

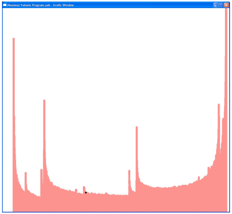
## Proposition

*On peut réaliser* **toutes** *les suites gauche/droite*
*Elles sont équiprobables:* **comportement stochastique**

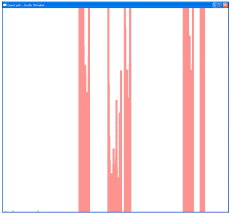
# Répartition statistique - histogrammes



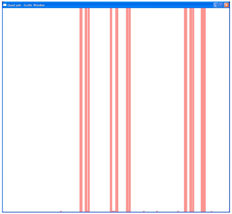
$a = 1$



$a = 0.9875$

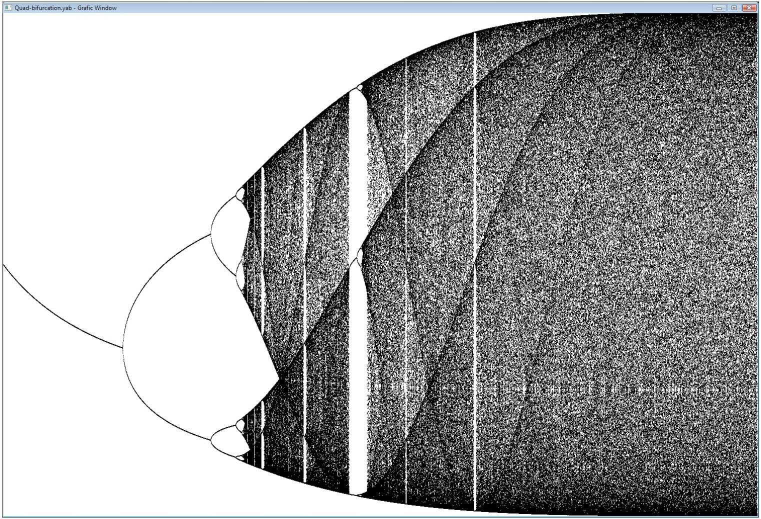


$a = 0.089325$



$a = 0.092225$

# Diagramme de bifurcation de $Q_a$




Abscisse: $1/2 \leq a \leq 2$ (non-linéaire), Ordonnée: $Q_a^n(x_0)$, $1000 \leq n \leq 1200$

Mélange des deux comportements

# Descriptions topologique et probabiliste

## Théorème (Graczyk-Swiątek, Lyubich)

$\{a \in [0,1] : Q_a$ *périodique stable*$\}$ *est un ouvert dense*

## Théorème (Jakobson, Lyubich)

$\{a \in [0,1] : Q_a$ *stochastique*$\}$ *est de mesure de Lebesgue positive*
$\{a \in [0,1] : Q_a$ *stochastique ou périodique stable*$\}$ *est de mesure de Lebesgue totale*

$Q_a$ stochastique

$\Longrightarrow$ instabilité topologique mais stabilité statistique pour les perturbations déterministes

# Nécessité de l'étude de dynamiques instables

Ce sont les **frontières** dans l'espace des dynamiques(cf. transitions de phase)
Mais surtout:

**Théorème (Abraham-Smale, Newhouse, Shub, Simon)**

*Il existe des dynamiques "robustement instables"*

Crise!

Problèmes de cette étude:

- définies par ce qu'elles ne sont pas
- extrême complication incontournable du point de vue topologique au moins

# Exploiter la crise

- Demander une stabilité beaucoup plus faible (entropie)
- Etude des obstructions persistantes:tangences homoclines,cycles homoclines hétérodimensionels
- Perturber pour simplifier: dynamique générique (Bonatti, Crovisier)
- Etablissement de dichotomies: telles que hyperbolicité/exposants nuls en dimension 2 (Mañé, Bochi)

# Applications?

- A d'autres domaines des mathématiques: géométrie, théorie des nombres
- Dans le monde réel?Euh... la finance?Résultats et méthodes fournissent des **métaphores** et des **avertissements**
- manque d'une théorie **suffisamment générale**, i.e., avec de larges conditions d'application mais aussi de **spécialistes** á l'interface

*Les mathématiciens sont comme les Français: ils traduisent tout ce que vous leur dites dans leur propre langue et cela devient aussitôt quelque chose d'entièrement différent.*

Gœthe — Maximes et Réflexions

# Merci!

et bon courage....