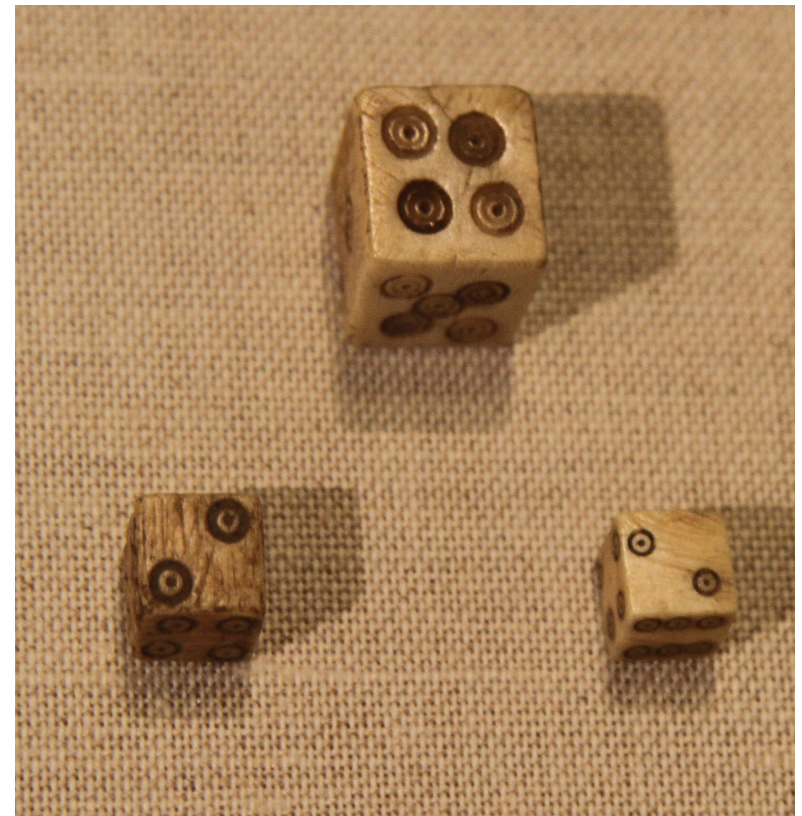


Alea jacta est

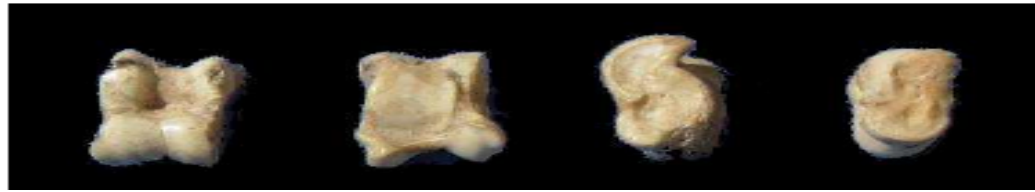
Dé en terre cuite trouvé à Khafaje, nord-est de Bagdad,
Mésopotamie, période akkadienne, 2300-2200 av. J.-C.
La face de dessus est un 4.



3 dés romains, 100 av. J.-C.-150 ap. J.-C.
Provenance : The Oriental Institute at the University of Chicago.



Les osselets



4 faces numérotées 3, 4, 6, 1 (probabilités : 0,4, 0,4, 0,1, 0,1)

On jette 4 osselets ; il y a 35 coups possibles, tous nommés.

Coup de Vénus : toutes les faces différentes

(Probabilité implicite $1/35 = 0,0286$, ou $4! \cdot 4.4/10000 = 0,0384$.)

Cicéron (106-43 av. J.-C.)

De oratore, 3, 15.

« Mais comme les hommes accoutumés à un travail assidu et journalier sont forcés par l'incommodité des saisons d'interrompre leur travail ils s'amuse en jouant à la paume, aux osselets, aux dés ou bien ils inventent un nouveau jeu pour charmer leurs loisirs, de même les philosophes éloignés de l'administration par les circonstances ou par goût s'adonnèrent les uns à la poésie, les autres à la géométrie, d'autres à la musique et d'autres enfin tels que les dialecticiens imaginèrent des espèces de jeux dans les sciences et consumèrent leur vie dans l'étude de ces arts inventés pour former l'esprit et le cœur des jeunes gens à la politesse et à la vertu. »

De divinatione, 1, 13.

« Quoi, serait-il vrai que le hasard (casus) pût réunir tous les éléments de la perfection et de la vérité? Quatre osselets amènent par hasard le point de Vénus : croyez-vous que quatre cents osselets pussent l'amener de même cent fois? Des couleurs jetées à l'aventure peuvent figurer les traits du visage, mais pensez-vous que l'on puisse par un semblable moyen représenter la beauté de la Vénus de Cos? Qu'un porc trace la lettre À en fouillant la terre ; vous viendra-t-il à l'idée qu'il puisse écrire l'Andromaque d'Ennius? Carnéade supposait qu'en fendant une pierre des carrières de Chio, on avait trouvé la tête d'un jeune faune; j'admets qu'on y découvrit quelque chose de semblable, mais rien sans doute de comparable aux ouvrages de Scopas, car il n'arrive jamais que le hasard imite parfaitement la vérité ... »

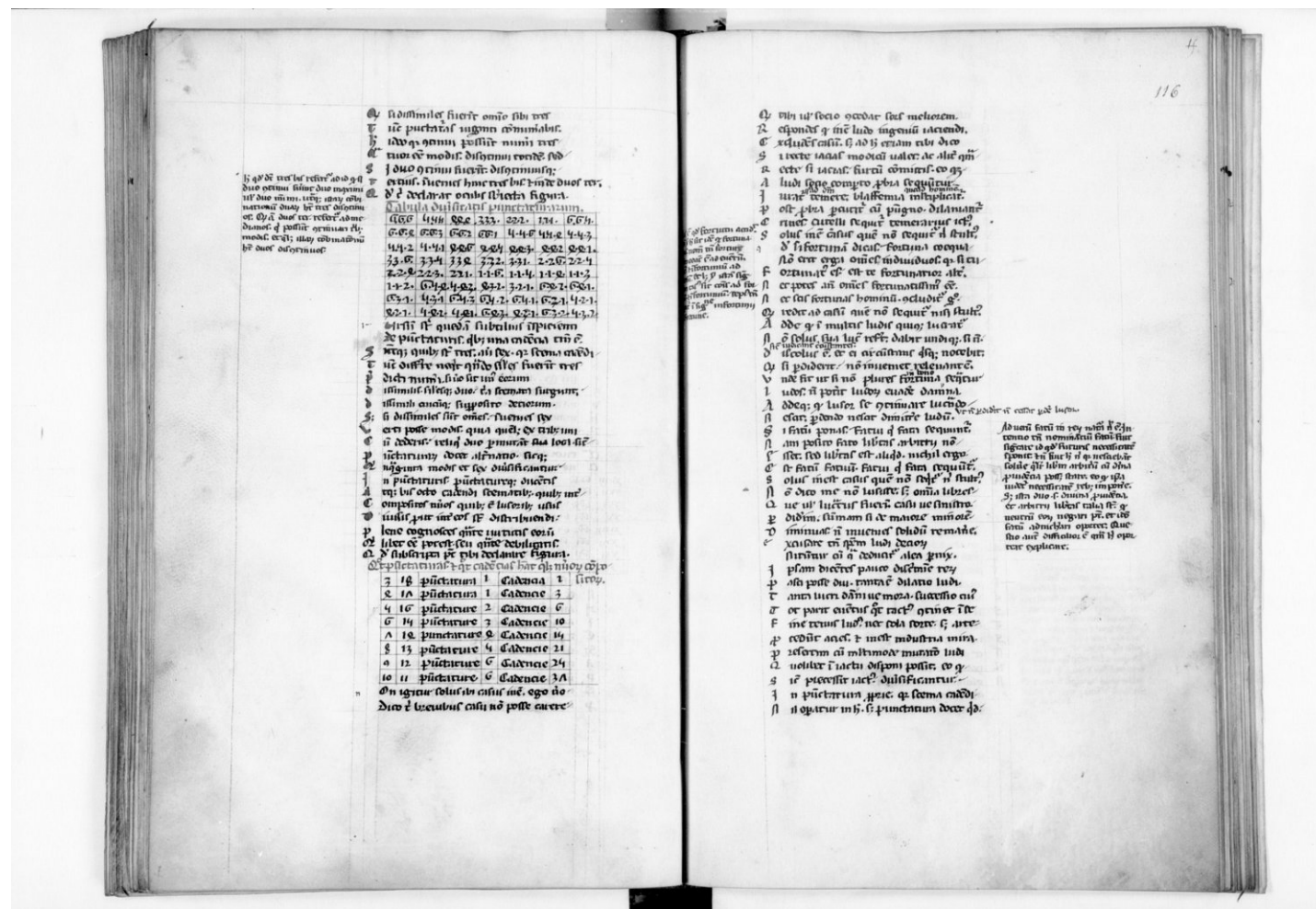
« Il en est ainsi des réponses des aruspices et de toute divination basée sur des conjectures ; car il n'est pas donné à l'esprit humain d'aller plus loin. Déçus parfois, elles nous conduisent cependant le plus souvent à la vérité ; car cette science remonte à un temps immémorial ; car cet art est le résultat d'une série d'observations recueillies à la suite d'une infinité d'événements semblables, précédés des mêmes signes. »

De senectute, 19.

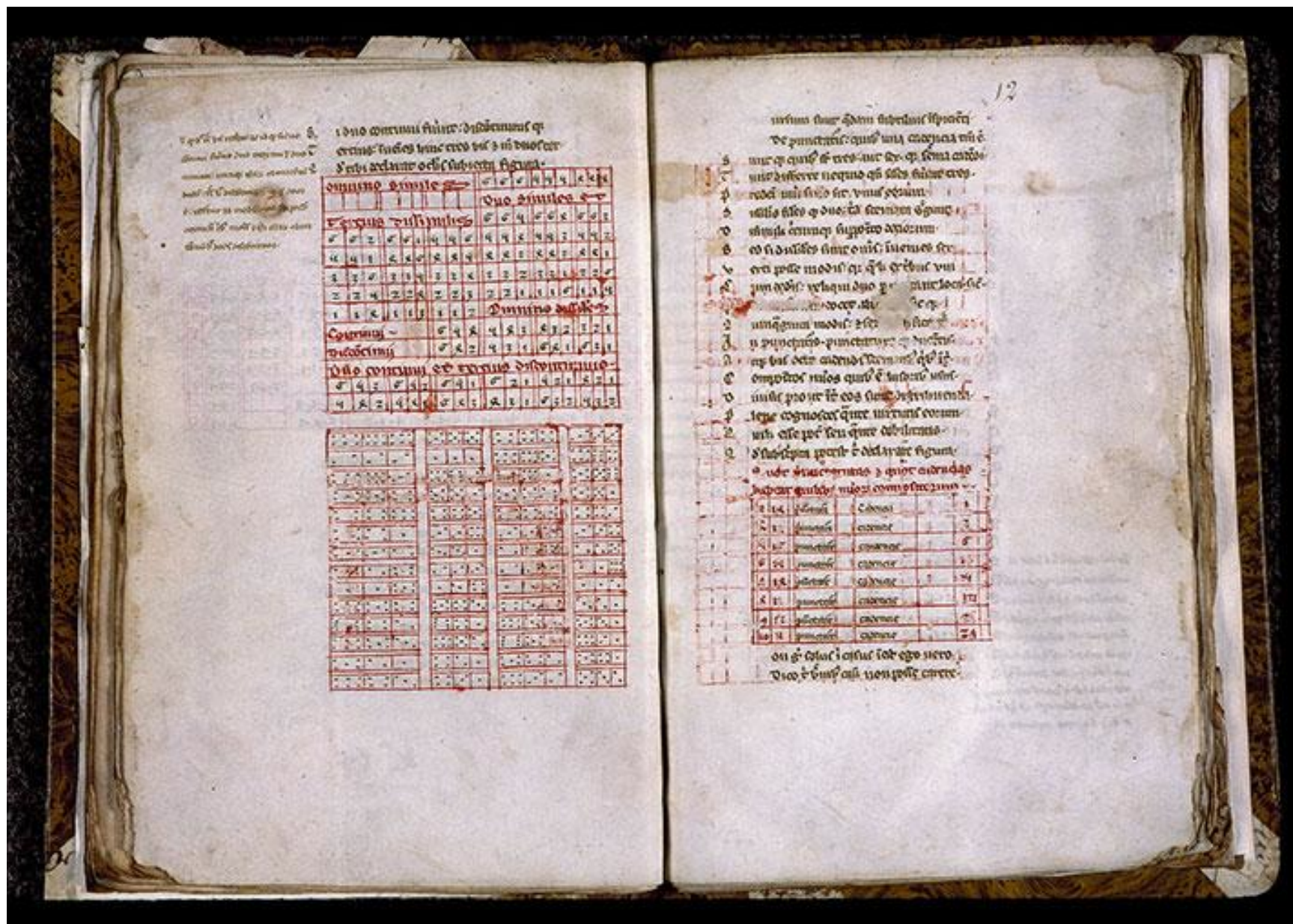
« Bien plus, les cas (chances) de mort sont plus nombreux dans le jeune âge que dans le nôtre. Les maladies y sont plus fréquentes, ... »

Ovidii carmen de vetula, f. 109-141.

Livre I, f. 115v-116r



Angers, Bibliothèque municipale, ms 541. Origine : Abbaye Saint-Aubin. BVMM.



Order lemon & faberica tableta									
XIII	6.5.5	6.3.1	6.7.1	4.2.1	4.3.7	2.8.7	2.4.3		
XIII	6.5.4	6.7.1.1	5.7.1	4.7.7	2.2.1	2.3.7	3.3.3		X
XIII	6.5.2	4.4.4	4.4.4	4.7.1	2.4.1	2.3.7	3.3.7		X
XV	6.5.3	6.5.2	6.2.2	4.1.1	2.7.1	4.3.4	7.1.3		XIII
XIII	5.7.1	6.2.2	7.4.2			3.7.1	7.1.7		XIII
XIII	5.7.1	6.3.3	4.4.3	2.2.4	3.7.1	7.1.7			X
XII	6.4.1	6.2.7	2.2.2	4.4.7	4.2.3	2.2.2	7.2.1		X
XII	6.2.1	6.3.7	4.4.1	4.2.7	2.2.3		1.1.1		XIII

h ic maior. minor. ille. q̄b; fit bma. dno; b;
 E m h; p̄ morte fit eterna. dem q̄na
 Q̄na q̄sieur eis succedit. Appropiando
 Q̄ natus ad medios q̄b; p̄ccato lena
 Q̄ reddet leniora t̄ subiecta tabella

¶ Et sex z quingenta modi uenendi
z nung minor esse pot ul' nung eorum.
¶ An qñ filius fuit filius et muni qui
z autu qñm: qz sex pñbiles fñ
z pñtuerit qz sex pñ quolibet una
z cū diffinitis alijs z vnus eorum
z cap duo finit. tñm pñ uñm
pñtuerit mōdū qñ dñpñcat ex sex
z uñbet aduicē qñdñ quolibet mñe
pñtuerit tñm qñ sex quapñcat
z dñ diffinitis fñm omñs fil tres
¶ Et pñtuerit uñm omñs fil tres

hac qd dicit nris dno refert
did qd si duo mignei uel
duo mimi uelqz alij abnu
tioni dux hnt eos disten
tuos qd hnt duos terrar
tur ad medanos q possunt
german. Eb; mox taliter
illz tribuam fr duos
distenmuos

h & ideo quia granni possit nuy tres
 Cetero de modis differimus tond. si
 s. duo granni sunt. discutiunt q.
 t. erit inuenies hic tres bis & in duos
 q. t. declarat centis subiecta figura

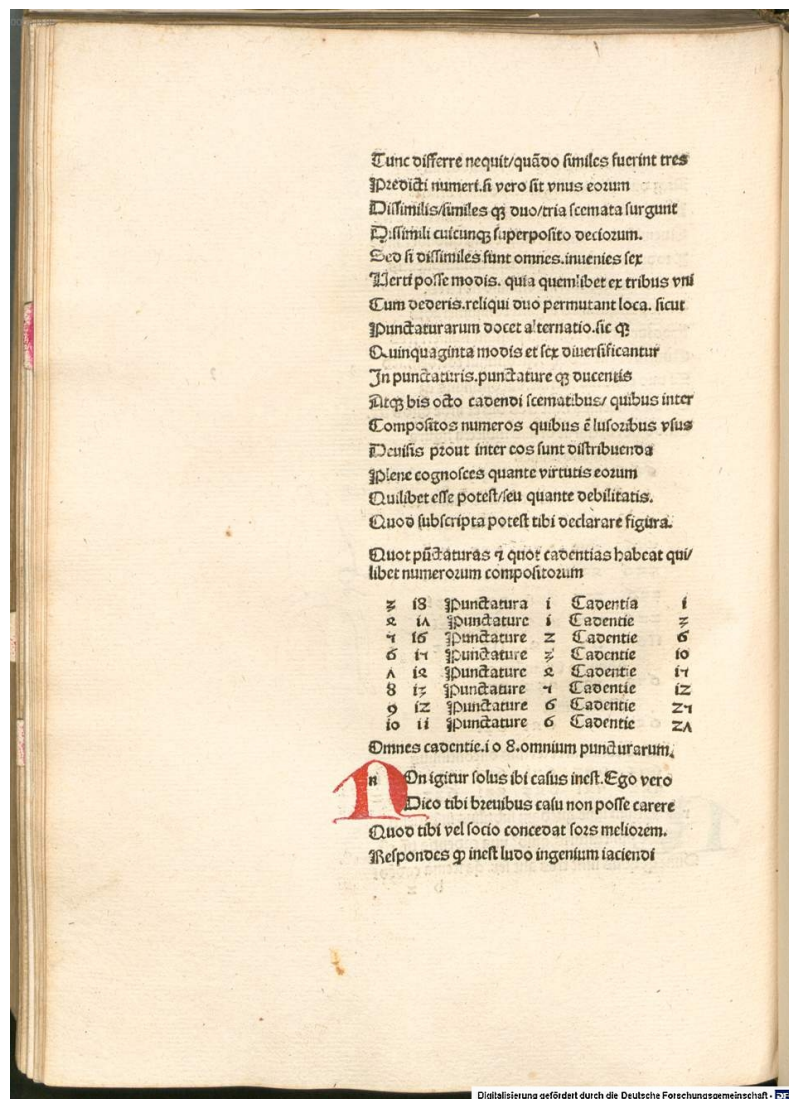
Tabula diuersitatis puncturaz

5.5	5.44	5.22	5.33	7.77	1.11	6.64
5.5	5.53	5.51	5.5	4.4	7.7	4.73
5.4	4.41	2.2	5.5	2.23	2.2	2.21
3.3	3.34	3.3	3.3	3.3	7.7	7.74
7.7	7.73	7.7	1.1	1.1	1.1	1.1
1.1	5.4	4.3	2.3	2.3	5.2	5.21
5.3	4.3	5.3	5.4	5.7	5.7	5.51
2.7	4.2	4.2	2.3	5.23	5.3	4.7

Iustus iur quā subtili mspiciendi
 de pueritiam: qd̄z una cadencia tūz
 E ite qd̄z ff̄z duo aut sex qd̄z prima caddi
 C ūe diffire neqz qm̄ similes fiunt et
 P tūz nūq̄ si vero fit vnus cōm̄
 D ūsimiles siles qd̄z duo: qd̄z scemata figut
 D ūsimili anctūz figuteste decimūz
 C si dūsimiles ff̄z om̄z: uenies sex
 C si polle modis qd̄z quibet ex qd̄z unq̄
 C si daddi: reliquūz p̄m̄uē loca sic
 qd̄z scemata: docet alternatū: sic qd̄z
 Q nq̄z gema modis 3 lex dūificat
 I n pūratatē: pūratatē qd̄z pūratatē
 A tūz p̄m̄uē cadendi scemata: qd̄z m̄
 C d̄p̄m̄uē nūq̄z colz qd̄z lūzēz: qd̄z
 C d̄p̄m̄uē pūz nūq̄z ff̄z dūificat
 P lene cognosces qd̄z d̄p̄m̄uē cōm̄
 U lūz qd̄z p̄m̄uē qd̄z qd̄z d̄p̄m̄uē
 Q d̄z subtilitē p̄m̄uē qd̄z d̄p̄m̄uē
 Q uor pūratatē qd̄z qd̄z cadential
 h̄b̄atē quilibet nūm̄uē
 Cōmpositorū: am̄uē

De Vetula, pseudo-Ovide, pseudo-Léon, protonotaire de Jean III Doukas Vatatzès (éd. et comm.), ca 1250, édition de 1479, Cologne, J. Koehloff, BNF. DFG.

Attribué à Richard de Fournival (1201-ca 1260), chancelier du Chapitre d'Amiens.



Quot punctaturas & quot cadentias
habeat quilibet numerorum
compositorum.

3	18	Punctatura	1	Cadentia	1
4	17	Punctaturæ	1	Cadentiæ	3
5	16	Punctaturæ	2	Cadentiæ	6
6	15	Punctaturæ	3	Cadentiæ	10
7	14	Punctaturæ	4	Cadentiæ	15
8	13	Punctaturæ	5	Cadentiæ	12
9	12	Punctaturæ	6	Cadentiæ	25
10	11	Punctaturæ	6	Cadentiæ	27

¶ Hi diuersimode uariantur, & inde bis octo
Compositi numeri nascuntur, non tamen æquæ
Virtutis. quoniam maiores atq; minores
Ipforum raro ueniunt, medijsq; frequenter.
Et reliqui quanto medijs quamuis propiores,
Tanto præstantes, & sæpius aduenientes

De vetula, traduction Jean-Yves Guillaumin.

Quot puncturas et quot cadentias habeat quilibet numerorum compositorum :
de tomber possède l'un quelconque des nombres composés) :

(Combien de configurations des points et combien de manières

- 3, 18 punctatura 1 cadentia 1
- 4, 17 punctatura 1 cadentia 3
- 5, 16 punctatura 2 cadentia 6
- 6, 15 punctatura 3 cadentia 10
- 7, 14 punctatura 4 cadentia 15
- 8, 13 punctatura 5 cadentia 12 (21)
- 9, 12 punctatura 6 cadentia 25
- 10, 11 punctatura 6 cadentia 27

410

Hi diversimode variantur, et inde bis octo
Compositi numeri nascuntur, non tamen aequae
Virtutis, quoniam maiores atque minores
Ipsorum raro veniunt, mediique frequenter.
Et reliqui quanto mediis quamvis propiores,
Tanto praestantes et saepius advenientes..

Ces nombres varient de diverses manières, et de là
Naissent deux fois huit nombres composés, qui cependant ne sont pas d'égale
Force, puisque les plus grands et les plus petits
D'entre eux viennent rarement, et les moyens fréquemment.
Et plus tous les autres se rapprochent autant que l'on veut des moyens,
Meilleurs ils sont et plus souvent ils se présentent.

445

Maintenant, si l'on observe plus attentivement les configurations des points, il y en a certaines pour lesquelles il y a une seule manière de tomber, et il y en a pour lesquelles il en existe trois ou six, parce que la manière de tomber ne peut être différente quand sont semblables les trois nombres dont on a parlé. Mais si de ces nombres il y en a un différent et deux semblables, trois cas de figure surgissent, selon que le nombre différent se présente sur tel ou tel dé. Mais si tous sont différents, tu trouveras qu'ils peuvent changer de six manières, parce que si tu donnes une position quelconque à l'un des trois, les deux autres échangent leurs positions, comme la permutation des configurations des points le montre. Et c'est ainsi que de cinquante-six manières ils se différencient en ce qui concerne les configurations des points ; et ces configurations, par deux cent seize manières de tomber,

Jérôme Cardan, (1501-1576), *Liber de Ludo Aleae*, écrit vers 1560, publié à Lyon au volume 1 de ses *Oeuvres complètes* en 1663.

A gauche, page de titre.

A droite, page 265 donnant le *Consensus Sortis* (jugement du sort) pour 2 et 3 dés.



LIBER DE LVDO ALEÆ.

CAPVT PRIMVM.

De Ludorum generibus.

LVDI constant, aut agilitate corporis, velut Pila; aut robore, vt Discus, & Lucta, aut industriâ, vt Latrunculorum, aut fortunâ, vt Aleæ propriè, & Talorum; aut utroque, vt Fritilli. Industria autem duplex, aut ludendi, aut certandi, velut in Primaria, nam & Chartarum ludus nomen subit Aleæ, quodd antiquo tempore Chartæ ignotæ essent: imò, & materia, qua conficiuntur. Indicio est, quodd scriberent in pergamentis coriis, scilicet hædorum, & papyro Ægyptia, & tabulis, & cæra & Philira. Dicitur autem Primaria, quodd primum obineat locum inter ludos Aleæ, seu pulchritudine, seu, quodd ex quatuor constet, quasi coniugationibus primis, & ad numerum elementorum, ex quibus componimur, non autem mundi. Continet autem varietates miras.

CAPVT II.

De Ludorum conditionibus.

lius fuerit, atque id ob tres causas; Prima, quodd huiusmodi intermissio seriarum actionum laudabilior est, quàm Ludi, vt quæ vel faciat aliquid, vt Pictura, vel sit secundum naturam, vt Musica, vel homo aliquid discat, vt legendo audiendove fabulas, historiasve. Secunda, quodd non sit sine labore, & idèd non inuitis nobis, plus temporis nobis eripiat, quàm par sit: Tempus autem, (vt Seneca aiebat) & rectè dum de longitudine, & breuitate vitæ loquitur, res est charissima. Tertia, quodd honestius sit otium illud, & non mali exempli, quemadmodum est ludus, & maxime apud filios, & domesticos. His accedit, quodd Ludus iram mouet, turbat mentem, & quandoque homo erumpit ad certamen pecuniæ, quodd turpissimum est, periculolum, & Legibus prohibitum. Denique soli non possumus ludere; at huiusmodi oblectamenti etiam soli delectari possumus.

CAPVT III.

Quibus, & quando magis conueniat ludere.

ITaque si persona sit prudens, senex, in Magistratu posita, & togata, aut Sacerdotio insignis, minus decet ludere, vt contra

a. æqualitatis, & à toto circuitu quincunx.
m. Sex autem sexdecim, & valde propè æqualitatem.
r-

Consensus sortis in duabus Aleis.

2	12	1	3	11	2	4	10	3.	Æqual.
5	9	4	6	8	5	7	8	18.	Ad Frit.

Consensus sortis in tribus Aleis tum Frit.

Sortis Fritilli.

3	18	1	3	11	5
4	17	3	4	12	5
5	16	6	5	12	6
6	15	10	6	13	3
7	14	15	7	3	3
8	13	21	8	3	6
9	12	25	9	3	7
10	11	27	10	3	6
			11	3	8
			12	2	6

Circuitus 216.
Æqualitas 108.

Ultra hunc numerum totidem quod in sorte vt 13. 21.

14. 15

Vnum punctum præterea habet 108.

Duo puncta habent: 111.

In tribus autem Aleistria puncta. Septem superant æqualitatem in Fritillo, in sorte pro

Christiaan Huygens (1629-1695)

des 2 dés peut se combiner l'un quelconque des 6 coups du troisième. Et 6 fois 36 font 216.

On trouve de la même façon qu'il y a 6×216 ou 1296 coups de quatre dés; et qu'on peut en continuant ainsi calculer le nombre de coups pour un nombre quelconque de dés: on multiplie par 6 le nombre précédent de coups, chaque fois qu'on ajoute un nouveau dé.

Ensuite, il faut savoir qu'avec deux dés on ne peut faire qu'un coup de 2 ou de 12 points, et 2 coups de 3 ou de 11 points. En effet, si nous appelons les dés A et B respectivement, il est évident que pour jeter 3 points A peut donner un as et B un 2, ou bien B un as et A un 2. De même pour obtenir 11 points, A peut donner 5 et B 6, ou bien A 6 et B 5. Le coup de 4 points est triple, savoir A 1, B 3, ou A 3, B 1, ou A 2, B 2. Le coup de 10 points est également triple. Celui de 5 ou de 9 points, quadruple. Celui de 6 ou de 8 points, quintuple. Celui de 7 points, sextuple.

Avec 3 dés l'on trouve pour	3 ou 18	points	1	coups différents.
	4 ou 17		3	
	5 ou 16		6	
	6 ou 15		10	
	7 ou 14		15	
	8 ou 13		21	
	9 ou 12		25	
	10 ou 11		27	

PROPOSITION I.

Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$.

Afin de non seulement démontrer cette règle mais aussi de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x , je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne, dont l'enjeu est également x ; il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable, et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou $2x - a$ en gagnant le jeu; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $2x$, duquel je dois donner a à l'autre joueur. Si $2x - a$ était égal à b , j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b . Je pose donc $2x - a = b$, d'où je tire la valeur de ma chance $x = \frac{a+b}{2}$. La preuve en est aisée. En effet, possédant $\frac{a+b}{2}$, je puis

hasarder cette somme contre un autre joueur qui mettra également $\frac{a+b}{2}$, et convenir avec lui que le gagnant donnera a à l'autre. J'aurai de sorte une chance égale d'avoir a si je perds, ou b si je gagne; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $a+b$ et je lui en donne a .

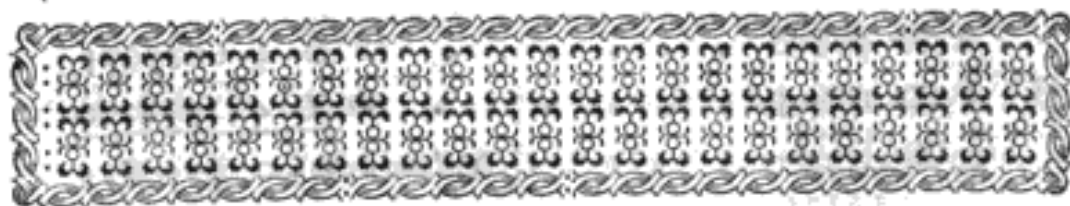
En chiffres. Lorsque j'ai une chance égale d'avoir 3 ou d'avoir 7, la valeur de ma chance est 5 d'après cette Proposition; et il est certain qu'ayant 5 je puis me procurer de nouveau la même chance. En effet, si je joue 5 contre une autre personne dont la mise est également 5, à condition que le gagnant donnera 3 à l'autre, c'est là un jeu équitable, et il est évident que j'ai la même chance d'avoir 3 en perdant, ou d'avoir 7 en gagnant; car en ce cas j'obtiens 10, dont je lui en donne 3.

PROPOSITION II.

Avoir des chances égales d'obtenir a , b ou c me vaut $\frac{a+b+c}{3}$.

Jacques Bernoulli (1654-1705), *Ars conjectandi*, 1713, première partie. Google.

III.	1.	3.	6.	10					
		1.	3.	6	1.				
			1.	3	3.	1.			
				16.	3.	1.			
				0.	6.	3.	1.		
				5.	10.	6.	3.	1.	
IV.	1.	4.	10.	20	5.	20.	10.	4.	1.
		1.	4.	10	6.	35.	20.	10.	4.
			1.	40.	56.	35.	20.	10.	
				14.	80.	56.	35.	20.	
				5.	104.	80.	56.	35.	
				0.	125.	104.	80.	56.	
V.	1.	5.	15.	35	0.	420.	305.	205.	126. &c.
		1.	5.	15	1.	540.	420.	305.	205.
			1.	5	5.	651.	540.	420.	305.
				10.	0.	735.	651.	540.	420.
				0.	0.	780.	735.	651.	540.
				5.	0.	780.	780.	735.	651.
VI.	1.	6.	21.	56.	1.	3906.	3431.	2856.	2247. &c.



ARTIS CONJECTANDI

PARS QUARTA,

tradens

Usū & applicationem præcedentis Doctrinæ in Civilibus, Morali-
libus & Oeconomicis.

CAPUT I.

*Preliminaria quædam de Certitudine, Probabilitate, Necessitate & Contingentia
Rerum.*



*C*ertitudo rei cujusvis spectatur vel *objectivè* & in se; nec aliud significat, quàm ipsam veritatem existentiam aut futuritionis illius rei: vel *subjectivè* & in ordine ad nos; & consistit in mensura cognitionis nostræ circa hanc veritatem.

Omnia, quæ sub Sole sunt vel fiunt, præterita, præsentia sive futura, in se & *objectivè* summam semper certitudinem habent. De præsentibus & præteritis constat; quoniam eo ipso, quo sunt vel fuerunt, non possunt non esse vel fuisse: Nec de futuris ambigendum, quæ pariter etsi non fati alicujus inevitabili ne-

cessi-

PROPOSITION XXXI.

On demande en combien de façons on peut amener un certain nombre ou point déterminé, avec un certain nombre de dez.

TOUS les Joueurs de Trictrac sçavent en combien de façons chaque point depuis deux jusqu'à douze, peut s'amener. M^r Huguens en a donné une Table pour deux & pour trois dez : mais on ne peut aller plus loin sans methode, car cela devient tout d'un coup extrêmement composé. On trouvera en examinant la solution du Problème précédent, que celui-ci y est renfermé. Voici une Table qui détermine tous ces hazards depuis deux dez jusqu'à neuf inclusivement.

T A B L E.

<i>Avec deux dez.</i>		<i>Avec trois dez.</i>	
Il y a	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right.$	Il y a	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \text{ coups qui} \\ 15 \text{ donnent} \\ 21 \\ 25 \\ 27 \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ ou } 12 \\ 3 \text{ ou } 11 \\ 4 \text{ ou } 10 \\ 5 \text{ ou } 9 \\ 6 \text{ ou } 8 \\ 7 \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ ou } 18 \\ 4 \text{ ou } 17 \\ 5 \text{ ou } 16 \\ 6 \text{ ou } 15 \\ 7 \text{ ou } 14 \\ 8 \text{ ou } 13 \\ 9 \text{ ou } 12 \\ 10 \text{ ou } 11 \end{array} \right.$
<i>Avec quatre dez.</i>		<i>Avec cinq dez.</i>	
Il y a	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \\ 35 \\ 56 \\ 80 \\ 104 \\ 125 \\ 140 \\ 146 \end{array} \right.$	Il y a	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 5 \\ 15 \\ 35 \\ 70 \\ 126 \text{ coups qui} \\ 205 \text{ donnent} \\ 305 \\ 360 \\ 480 \\ 561 \\ 795 \\ 930 \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ ou } 24 \\ 5 \text{ ou } 23 \\ 6 \text{ ou } 22 \\ 7 \text{ ou } 21 \\ 8 \text{ ou } 20 \\ 9 \text{ ou } 19 \\ 10 \text{ ou } 18 \\ 11 \text{ ou } 17 \\ 12 \text{ ou } 16 \\ 13 \text{ ou } 15 \\ 14 \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ ou } 30 \\ 6 \text{ ou } 29 \\ 7 \text{ ou } 28 \\ 8 \text{ ou } 27 \\ 9 \text{ ou } 26 \\ 10 \text{ ou } 25 \\ 11 \text{ ou } 24 \\ 12 \text{ ou } 23 \\ 13 \text{ ou } 22 \\ 14 \text{ ou } 21 \\ 15 \text{ ou } 20 \\ 16 \text{ ou } 19 \\ 17 \text{ ou } 18 \end{array} \right.$

Avec six dez.

Il y a	1	6 ou 36
	6	7 ou 35
	21	8 ou 34
	56	9 ou 33
	126	10 ou 32
	252	11 ou 31
	456	12 ou 30
	756 coups qui	13 ou 29
	1161 donnent	14 ou 28
	1666	15 ou 27
	2247	16 ou 26
	2856	17 ou 25
	3431	18 ou 24
	3906	19 ou 23
	4221	20 ou 22
	4332	21

Avec sept dez.

Il y a	1	7 ou 42
	7	8 ou 41
	28	9 ou 40
	84	10 ou 39
	210	11 ou 38
	462	12 ou 37
	917	13 ou 36
	1667	14 ou 35
	2807 coups qui	15 ou 34
	4417 donnent	16 ou 33
	6538	17 ou 32
	9142	18 ou 31
	12117	19 ou 30
	15267	20 ou 29
	18327	21 ou 28
	20993	22 ou 27
	22967	23 ou 26
	24017	24 ou 25

Avec huit dez.

Il y a	1	8 ou 48
	8	9 ou 47
	36	10 ou 46
	120	11 ou 45
	330	12 ou 44
	792	13 ou 43
	1708	14 ou 42
	3368	15 ou 41
	6147	16 ou 40
	10480	17 ou 39
	16808 coups qui	18 ou 38
	25488 donnent	19 ou 37
	36688	20 ou 36
	50188	21 ou 35
	65808	22 ou 34
	82384	23 ou 33
	98813	24 ou 32
	113688	25 ou 31
	125588	26 ou 30
	133288	27 ou 29
	135954	28

Avec neuf dez.

Il y a	1	9 ou 54
	9	10 ou 53
	45	11 ou 52
	165	12 ou 51
	495	13 ou 50
	1287	14 ou 49
	2994	15 ou 48
	6354	16 ou 47
	12465	17 ou 46
	22825	18 ou 45
	39303 coups qui	19 ou 44
	63999 donnent	20 ou 43
	98979	21 ou 42
	145899	22 ou 41
	205560	23 ou 40
	277464	24 ou 39
	359469	25 ou 38
	447669	26 ou 37
	536569	27 ou 36
	619569	28 ou 35
	689715	29 ou 34
	740619	30 ou 33
	767394	31 ou 32

The DOCTRINE of CHANCES. 17.

LEMMA.

TO find how many Chances there are upon any number of Dice, each of them of the same given number of Faces, to throw any given number of Points.

SOLUTION.

LET $p+1$ be the number of Points given, n the number of Dice, f the number of Faces in each Die: Make $p-f=q$; $q-f=r$; $r-f=s$; $s-f=t$ &c. and the number of Chances will be

$$\begin{aligned} &+ \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \&c. \\ &- \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \&c. \times \frac{n}{1} \\ &+ \frac{r}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3} \&c. \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \\ &- \frac{s}{1} \times \frac{s-1}{2} \times \frac{s-2}{3} \&c. \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

which Series ought to be continued till some of the Factors in each Product become either = 0, or Negative.

N. B. So many Factors are to be taken in each of the Products $\frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \&c.$ $\frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \&c.$ as there are Units in $n-1$.

Thus, for Example, let it be required to find how many Chances there are for throwing Sixteen Points with Four Dice.

$$\begin{aligned} &+ \frac{16}{1} \times \frac{15}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{13}{4} &= + 455 \\ &- \frac{9}{1} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{6}{4} &= - 336 \\ &+ \frac{3}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{0}{4} &= + 6 \end{aligned}$$

But $455 - 336 + 6 = 125$; therefore One Hundred and Twenty Five is the number of Chances required.

Thus if it be required to find the number of Chances for throwing 27 Points with 6 Dice: let 27 be subtracted from 42, Sum of the Extremes 6 and 36, and the remainder being 15, it may be concluded that the number of Chances for throwing 27 Points is the same as for throwing 15 Points.

Although, as I have said before, the Demonstration of this Lemma may be had from my *Miscellanea*; yet I have thought fit, at the desire of some Friends, to transfer it to this place.

DEMONSTRATION.

1°. Let us imagine a Die so constituted as that there shall be upon it a certain number of Faces, all marked 1; and let the number of those Faces be denominated by r ; 2°. let us imagine that there are as many Faces marked 11, as are denominated by rr ; 3°. let us imagine that there are as many faces marked 111, as are denominated by r^3 , and so on; which being done, the geometric Progression $1 + r + rr + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8$, &c. continued to so many Terms as there are different Denominations in the Die, so that this Progression may represent all the Chances of one Die: this being supposed, it is very plain that in order to have all the Chances of two Dice this Progression ought to be raised to its Square, and that to have all the Chances of three Dice, the same Progression ought to be raised to its Cube; and universally, that if the number of Dice be expressed by n , that Progression ought accordingly to be raised to the Power n : Now suppose the number of Faces in

each Die to be f , then the Sum of that Progression will be $\frac{1-r^f}{1-r}$, and consequently all the Chances that can happen upon n Dice, will be expressed by some Term of the Series that will result from

the Fraction $\frac{1-r^f}{1-r}$ raised to the power n ; but as the least number of Points, that can be thrown with n Dice, is n Units, and the next greater $n+1$, and the next $n+2$, &c. it is plain that the first Term of the Series will represent the number of Chances for throwing n Points, and that the second Term of the Series will represent the number of Chances for throwing $n+1$ Points, and so on. And that therefore if the number of Points to be thrown be

- Formule de Montmort-Moivre (ca 1710)

Cas de n dés à f faces, numérotées à partir de 0. La probabilité d'obtenir une somme s en jetant les n dés, est égale à

$$\frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{(n-1)!f^n} - n \frac{(s-f+1)\dots(s-f+n-1)}{(n-1)!f^n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{(s-2f+1)\dots(s-2f+n-1)}{(n-1)!f^n} - \dots$$

en arrêtant la somme alternée dès qu'un des facteurs devient négatif.

- Formule de Simpson-Lagrange-Laplace (1757-1777)

Cas de n dés à une infinité de faces entre 0 et 1.

On prend s et f infiniment grands, de sorte que

$$\frac{1}{f} = dx, \frac{s}{f} = x$$

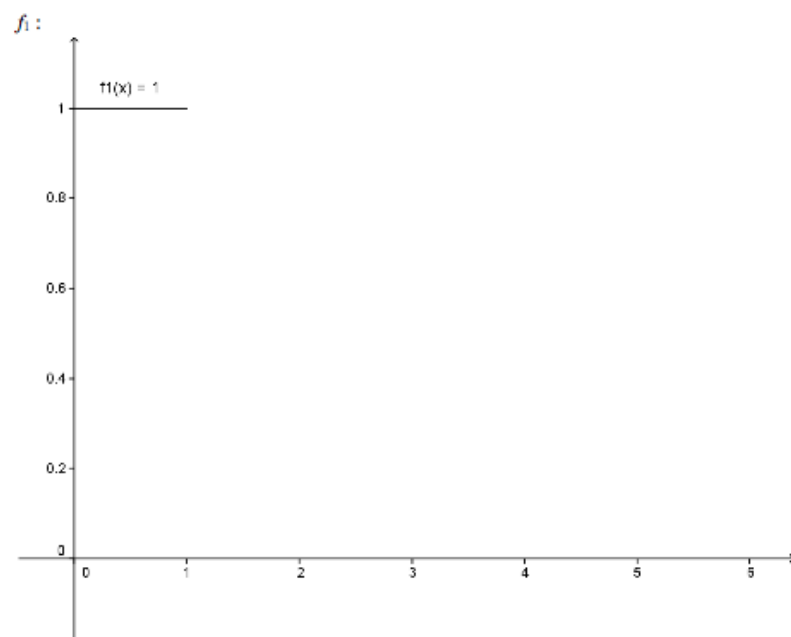
la formule ci-dessus devient

$$\frac{dx}{(n-1)!} \left[x^{n-1} - n(x-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(x-2)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(x-3)^{n-1} + \dots \right]$$

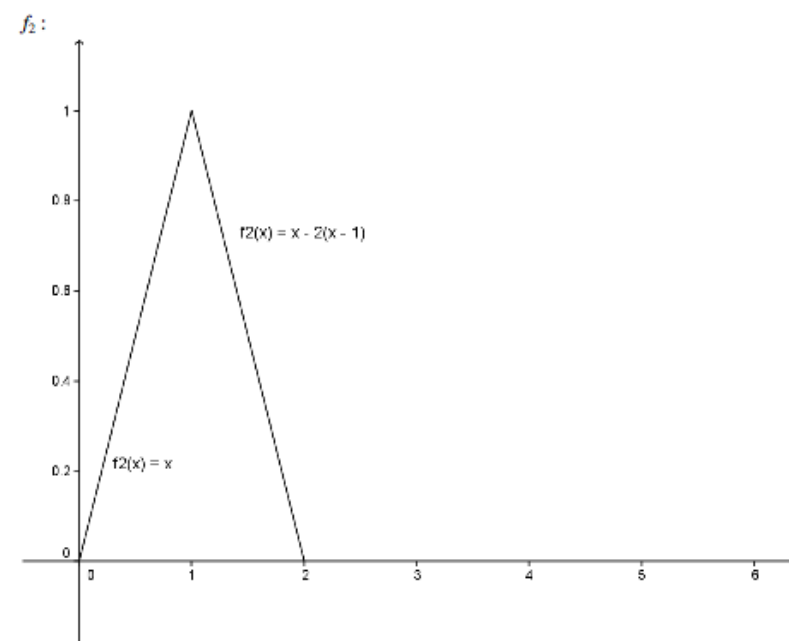
que l'on arrête lorsque $k < x$.

- C'est la densité en x de la somme de n quantités indépendantes également distribuées entre 0 et 1.

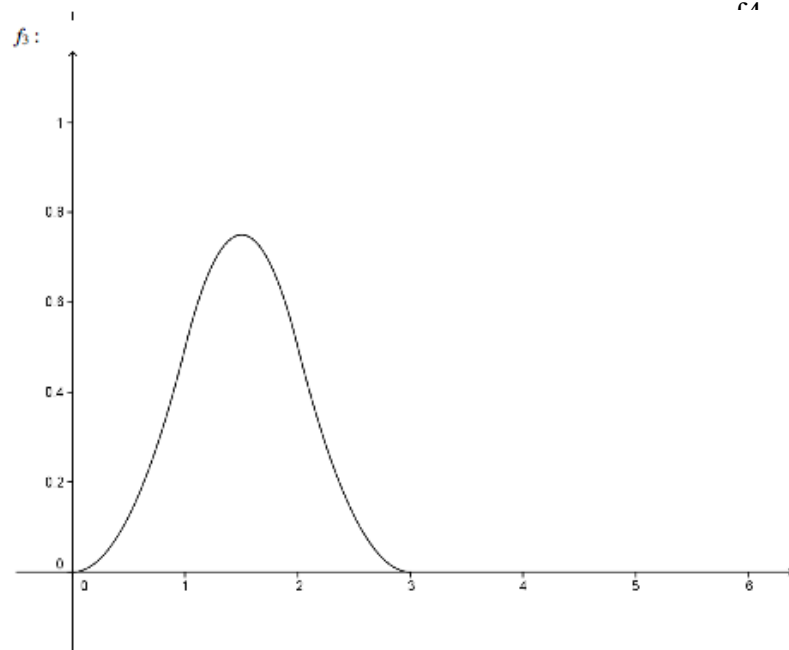
f1



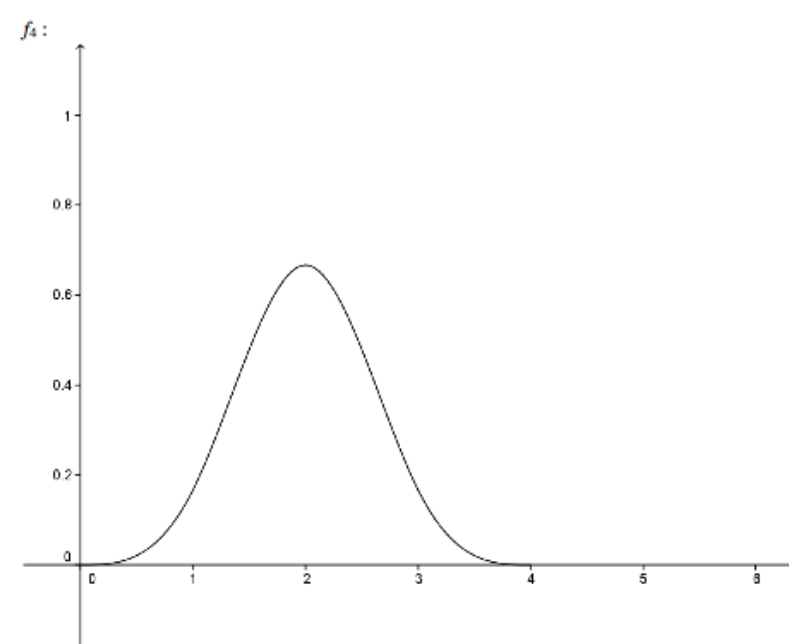
f2



f3

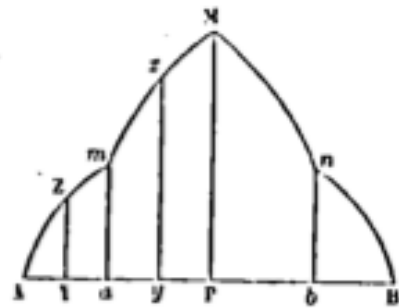


f4



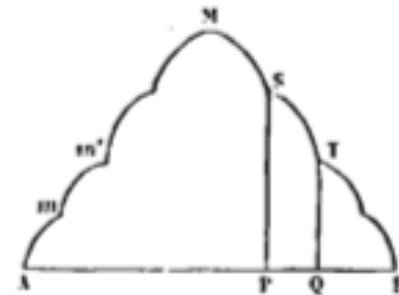
P.-S. Laplace, « Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la terre, et sur les fonctions, » *Savants étrangers*, (1773/1776), p. 503-540, *Œuvres* 8, p. 279-321.

Fig. 3.



$$n=4$$

Fig. 4.



$$n=8$$

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

« Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. »

Mém. Acad. Sci. 10 (1810), p. 353-415,

Œuvres 12, p. 301-353.

QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES. 309

mouvement direct et quarante-cinq un mouvement rétrograde. La somme des inclinaisons des orbites des premières est de $2622^{\circ},944$ et celle des inclinaisons des orbites des autres est de $2490^{\circ},089$. L'inclinaison moyenne de toutes ces orbites est de $51^{\circ},87663$. Si dans la formule (a) de l'article précédent on suppose $e' = e$ et $s = \frac{1}{2}nh$, elle devient

$$\frac{1}{1.3.5\dots n.2^n} \left[\left(n + \frac{2e}{h} \right)^n - n \left(n + \frac{2e}{h} - 2 \right)^n + \frac{n(n-1)}{1.3} \left(n + \frac{2e}{h} - 4 \right)^n - \dots - \left(n - \frac{2e}{h} \right)^n + n \left(n - \frac{2e}{h} - 2 \right)^n - \dots \right].$$

Dans le cas présent, $n = 97$, $h = 100^{\circ}$, $e = 182^{\circ},033$, et alors elle donne la probabilité que la somme des inclinaisons doit être comprise dans les limites $50^{\circ} \pm 1^{\circ},87664$; mais le nombre considérable des termes de cette formule et la précision avec laquelle il faut avoir chacun d'eux en rend le calcul impraticable. Il est donc indispensable de chercher une méthode d'approximation pour ce genre d'expressions analytiques ou de résoudre le problème d'une autre manière. C'est ce que j'ai fait par la méthode suivante.

III.

Je conçois l'intervalle h divisé dans un nombre infini $2i$ de parties que je prends pour l'unité, et je considère la fonction

$$e^{-i\sigma\sqrt{-1}} + e^{-(i-1)\sigma\sqrt{-1}} + \dots + e^{-\sigma\sqrt{-1}} + 1 + e^{\sigma\sqrt{-1}} + \dots + e^{(i-1)\sigma\sqrt{-1}} + e^{i\sigma\sqrt{-1}},$$

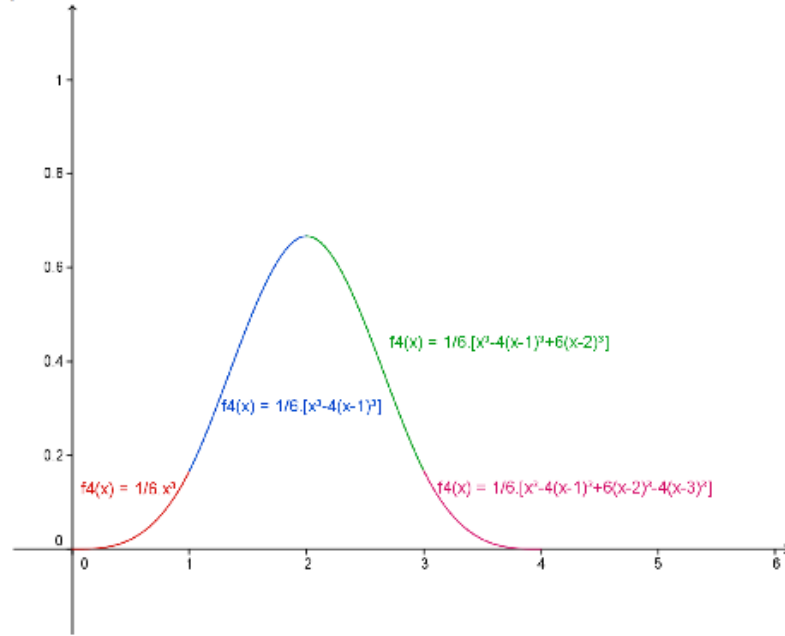
en désignant maintenant par e le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

En l'élevant à la puissance n , le coefficient de $e^{i\sigma\sqrt{-1}}$ du développement de cette puissance exprimera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme des inclinaisons des orbites est égale à L . Cette puissance peut être mise sous la forme

$$(1 + 2 \cos \sigma + 2 \cos 2\sigma + \dots + 2 \cos i\sigma)^n.$$

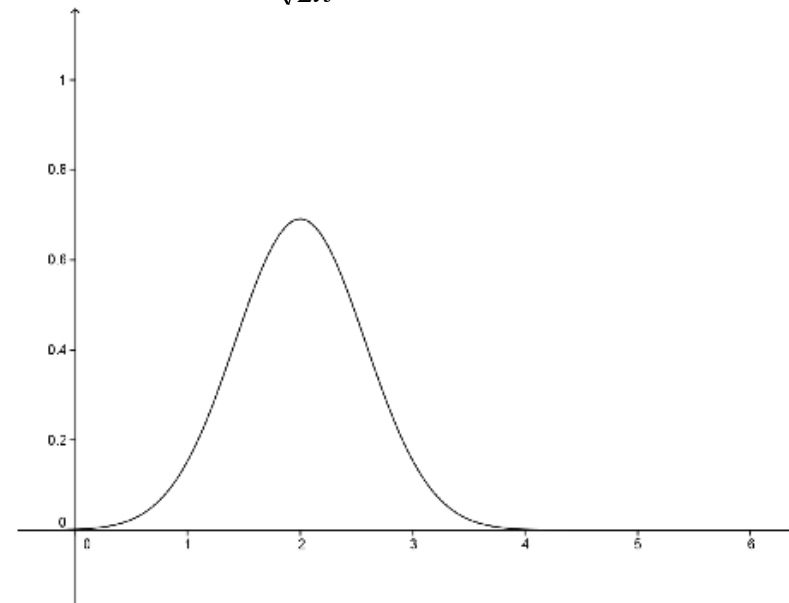
f4

f_4 couleurs :



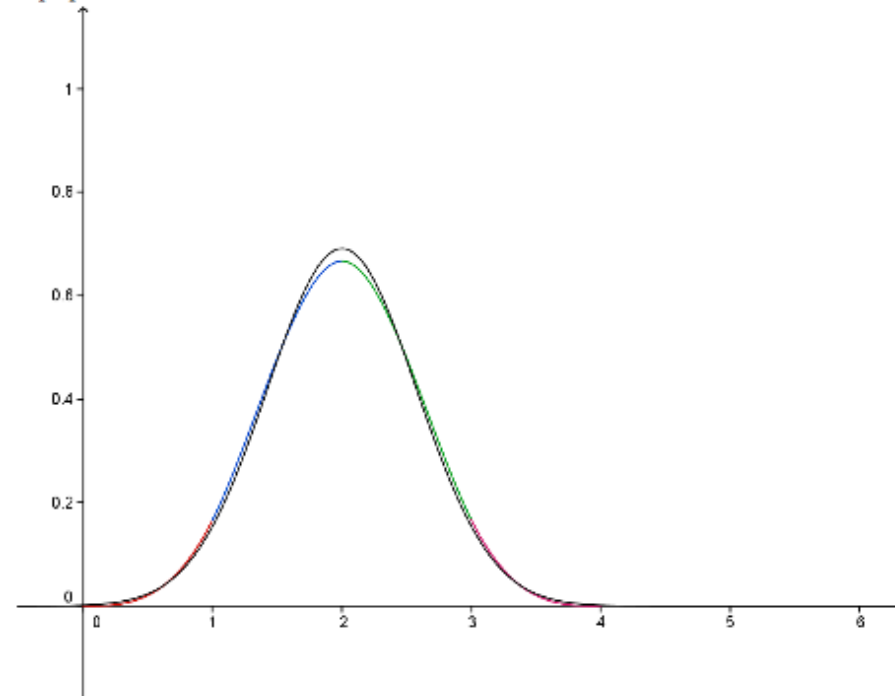
courbe de Gauss – loi normale

gaussienne $m = 2, s = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3}{2}(x-2)^2}$



Superposition

superposition :



TITULUS XVIII.

*De maleficis et mathematicis , et
caeteris similibus.*

1. *Imp. Antoninus A. Titio.*

PLUS est hominem extinguere veneno ,
quàm occidere gladio.

Proposit. sine die et consule.

2. *Impp. Diocletianus et Maximianus
AA. et CC. Tiberio.*

Artem geometriæ discere , atque exer-
cere publicè interest. Ars autem mathe-
matica damnabilis est , et interdicta om-
nino.

Sancit. 13 calend. septemb. Sirmii ,
CC. Cons.

3. *Imp. Constantinus A. ad Maximum.*

Nullus aruspex , nullus sacerdos , nullus
eorum , qui huic ritui adsolent ministrare ,
ad limen alterius accedat , nec ob alteram
causam , sed hujusmodi hominum amici-
tia (quamvis vetus) repellatur : concre-
mando illo aruspice , qui ad domum alie-
nam accesserit : et illo in insulam depor-
tando post ademptionem honorum , qui
eum advocaverit suasionibus , vel præmiis.
Accusatorem autem hujusmodi criminis

TITRE XVIII.

*Des empoisonneurs , des mathéma-
ticiens et des autres criminels de
cette sorte.*

1. *L'empereur Antonin à Titius.*

C'EST un plus grand crime de faire
mourir quelqu'un par le poison que de
le tuer avec une arme.

Sans date ni désignation de consulat.

2. *Les emper. Dioclétien et Maximien ,
et les Césars , à Tiberius.*

Il est de l'intérêt public qu'on apprenne
et qu'on exerce l'art de la géométrie ;
mais la mathématique est un art dam-
nable et rigoureusement prohibé.

Fait à Sirmium , le 13 des calendes de
septembre , sous le consulat des Césars.

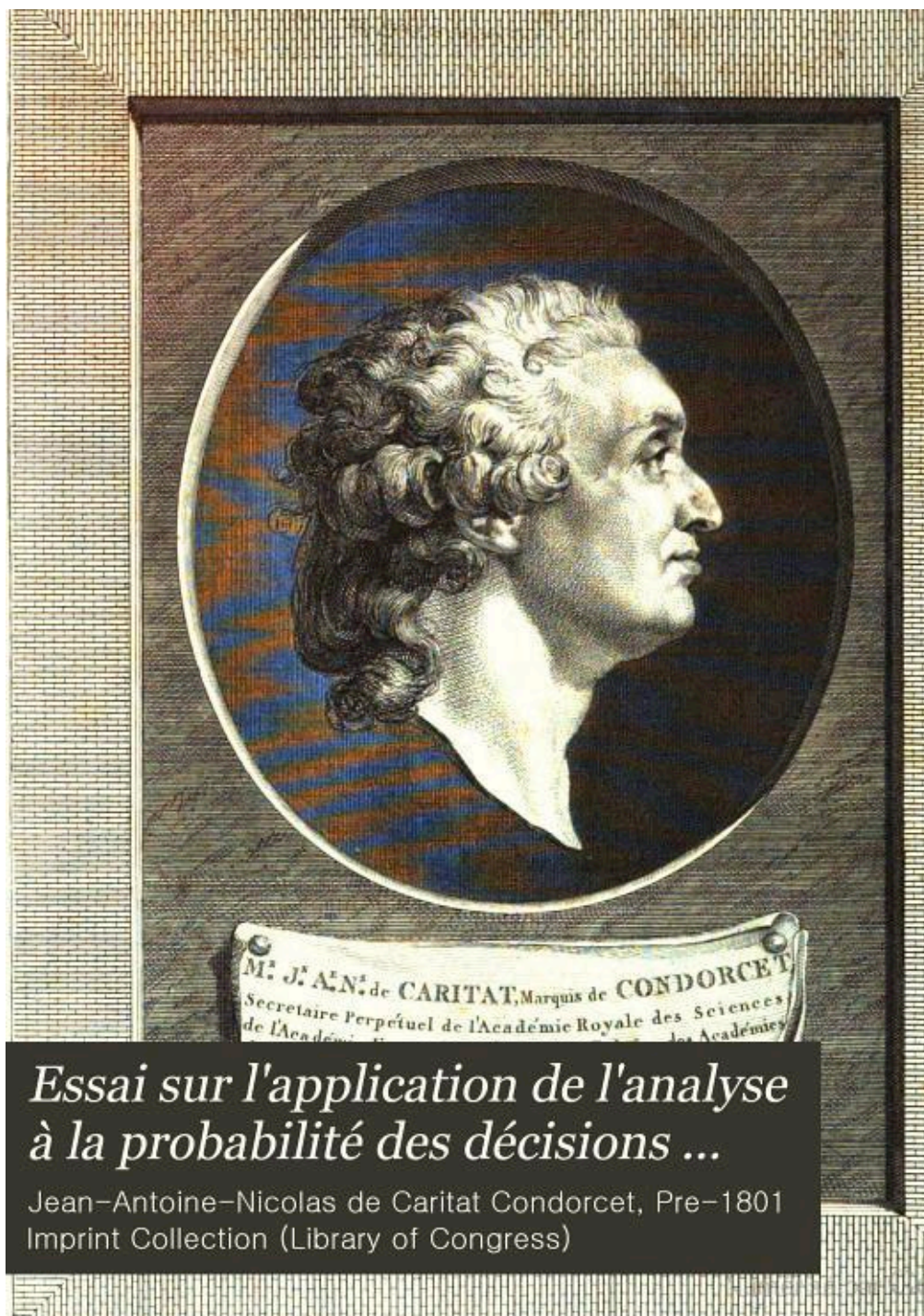
3. *L'empereur Constantin à Maxime.*

Qu'aucun aruspice , qu'aucun prêtre ni
aucun des ministres attachés au culte des
payens , n'approche de la porte de la
maison d'autrui , ni pour cause des fonc-
tions qu'il exerce , ni pour autres ; mais
que par-tout on rompe les liaisons , quoi-
que anciennes , que l'on a avec de telles
personnes ; que tous s'abstiennent de leur
commerce : l'aruspice qui sera convaincu
d'avoir pénétré dans la maison d'autrui ,

Niccolo Tartaglia (1499-1557),

Nova Scientia, 1537. Edition de Venise
1550, E-lib.ch





*Essai sur l'application de l'analyse
à la probabilité des décisions ...*

Jean-Antoine-Nicolas de Caritat Condorcet, Pre-1801
Imprint Collection (Library of Congress)

Nicolas de Condorcet (1743-1794)

En général, tout pouvoir, de quelque nature qu'il soit, en quelques mains qu'il ait été remis, de quelque manière qu'il ait été conféré, est naturellement ennemi des lumières.

(5^e Mémoire sur l'Instruction publique, 1792)

Après avoir affranchi l'instruction de toute espèce d'autorité, gardons-nous de l'assujettir à l'opinion commune : elle doit la devancer, la corriger, et non la suivre et lui obéir.

(Rapport et projet de décret sur l'organisation générale de l'Instruction publique, 1792)

Celui qui a besoin de recourir à un autre pour écrire ou même lire une lettre, pour faire le calcul de sa dépense ou de son impôt,, celui-là est nécessairement dans une dépendance individuelle, dans une dépendance qui rend nul ou dangereux pour lui l'exercice des droits de citoyen, et réduit à une chimère humiliante pour lui-même l'égalité prononcée par la nature et reconnue par la loi. Mais ces mêmes connaissances suffisent pour l'affranchir de cette servitude : l'homme, par exemple qui sait les quatre règles de l'arithmétique, ne peut être dans la dépendance de Newton pour aucune des actions de la vie commune.

(Rapport et projet de décret ...)

La vérité seule peut être la base d'une prospérité durable ... (Mémoire Inst; Pub.)

« Observons qu'à l'exception des vérités mathématiques, des propositions identiques de la métaphysique, et de celles qui expriment nos sensations actuelles, il n'y a aucune espèce de proposition qui soit certaine, que toutes sont probables, toutes appartenant à cette partie du calcul des probabilités où l'on juge de l'ordre futur des événements par celui qu'ils ont observé ou, de ce qui est plus précis, de l'ordre des événements inconnus par celui des événements connus ». (Institut, ms 875, f 105/106).

« Quelle est la nature des vérités auxquelles conduit le calcul des probabilités ? »



DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

UN grand homme *, dont je regretterai toujours les leçons, les exemples, & sur-tout l'amitié, étoit persuadé que ^{Objet de l'Ouvrage.} les vérités des Sciences morales & politiques, sont susceptibles de la même certitude que celles qui forment le système des Sciences physiques, & même que les branches de ces Sciences qui, comme l'Astronomie, paroissent approcher de la certitude mathématique.

Cette opinion lui étoit chère, parce qu'elle conduit à l'espérance consolante que l'espèce humaine fera nécessairement des progrès vers le bonheur & la perfection, comme elle en a fait dans la connoissance de la vérité.

C'étoit pour lui que j'avois entrepris cet ouvrage, où en soumettant au Calcul des questions intéressantes pour l'utilité commune, j'essayois de prouver, du moins par un exemple, cette opinion qu'il eût voulu faire partager à tous ceux qui aiment la vérité: il en voyoit avec peine plusieurs qui, persuadés qu'on ne pouvoit espérer d'y atteindre, dans les questions de ce genre, dédaignoient, par cette seule raison, de s'occuper des objets les plus importants.

Si l'humanité n'eût pas eu le malheur, long-temps irréparable, de le perdre trop tôt, cet ouvrage eût été moins imparfait: éclairé par ses conseils, j'aurois vu mieux ou plus loin, & j'aurois avancé avec plus de confiance des principes

* M. Turgot.

LETTRE V.

De M. de Condorcet.

Paris, ce 2 mai 1785.

SIRE,

L'Ouvrage que j'ai l'honneur de présenter à V. M. traite d'objets très-importans. J'ai cru qu'il pourroit être utile d'appliquer le calcul des probabilités à celle des décisions rendues à la pluralité des voix, & comme j'ai toujours aimé presque également les mathématiques & la philosophie, je me suis trouvé heureux de pouvoir satisfaire deux passions à la fois.

Je n'ose désirer que V. M. daigne jeter les yeux sur un discours, beaucoup trop long peut-être, où j'ai exposé les principes & les résultats de l'ouvrage, dégagés de tout l'appareil du calcul. Je prendrai seulement la liberté de lui parler de deux de ces résultats. L'un conduit à regarder la peine de mort comme absolument injuste, excepté dans les cas où la vie du coupable peut être dangereuse pour la société. Cette conclusion est la suite d'un principe que je crois rigoureusement vrai : c'est que toute

possibilité d'erreur dans un jugement est une véritable injustice , toutes les fois qu'elle n'est pas la suite de la nature même des choses , & qu'elle a pour cause la volonté du législateur : or comme on ne peut avoir une certitude absolue de ne pas condamner un innocent , comme il est même très-probable que , dans une longue suite de jugemens , un innocent sera condamné : il me paroît en résulter qu'on ne peut sans injustice rendre volontairement irréparable l'erreur à laquelle on est nécessairement & involontairement exposé.

Le second résultat est l'impossibilité de parvenir, par le moyen des formes auxquelles les décisions peuvent être assujetties , à remplir les conditions qu'on doit exiger , à moins que ces décisions ne soient rendues par des hommes très-éclairés : d'où l'on doit conclure que le bonheur des peuples dépend plus des lumières de ceux qui les gouvernent que de la forme des constitutions politiques ; & que plus ces formes sont compliquées , plus elles se rapprochent de la démocratie , moins elles conviennent aux nations où le commun des citoyens manque d'instruction ou de temps pour s'occuper des affaires publiques ; qu'enfin il y a plus d'espérance dans une monarchie que dans une république , de voir la destruction des abus s'opérer avec promptitude & d'une manière tranquille.

- Augustin Cournot (1801-1877)
-
- *Matérialisme, vitalisme, rationalisme. Etude sur l'emploi de la science en philosophie*, Paris, 1875, p. 187.
- « Tandis que les choses soumises au régime de la vie ont pour caractère essentiel de passer par des périodes d'accroissement et de déclin, tout ce qui se trouve en dehors de ce régime, au dessus ou au dessous, comporte la durée infinie et dans certains cas le progrès indéfini. »
-
- *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, Paris, 1872, tome 2, p. 239-240.
- "De roi de la Création qu'il était ou qu'il croyait être, l'homme est monté ou descendu (comme il plaira de l'entendre) au rôle de concessionnaire d'une planète [...] Il avait à faire valoir une domaine, il a une mine à exploiter : et ces quelques mots suffisent pour indiquer sous quelle face nouvelle vont désormais se présenter les plus graves problèmes de l'économie sociale, ainsi que les conditions de la vie historique des peuples".
-
-
- *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans* , Paris, 1861, tome 2, p. 341.
- « Notre thèse consiste à soutenir que les progrès de la civilisation, en laissant subsister les [causes physiques], amortissent l'action des [causes politiques], et que le système politique tend vers la stabilité, en ce sens du moins que les causes politiques d'instabilité s'amointrissent ou disparaissent. Et remarquons bien que la condition de la fixité, ou du progrès vers la fixité, c'est toujours dans l'ordre politique comme ailleurs, une sorte d'engourdissement de l'énergie vitale, une disposition à passer, de la sphère où s'accomplissent les phénomènes de la nature vivante, sous l'empire des instincts et des passions, à celle où tout se gouverne d'après l'expérience, par les lois de la logique et du calcul. »
-
- *Matérialisme,*, p.185.
- « Même en pleine civilisation, l'on distingue fort bien ce qui se fait selon l'impulsion de la Nature, ce qu'elle peut revendiquer comme venant d'elle, et ce qui se fait méthodiquement, logiquement, rationnellement, quoique pas toujours raisonnablement. »