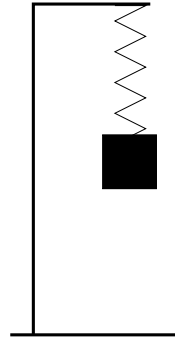


De la simulation informatique  
à la modélisation algorithmique :  
dans quel langage décrire le monde ?

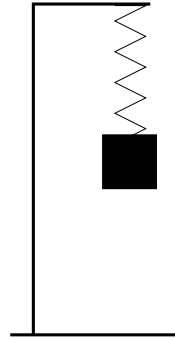
Gilles Dowek

## Un problème



Quelle est la fréquence des oscillations ?

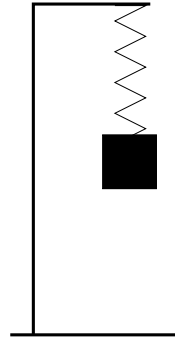
## Un problème



Quelle est la fréquence des oscillations ?

$$m\ddot{x} = -mg - kx$$

## Un problème



Quelle est la fréquence des oscillations ?

$$m\ddot{x} = -mg - kx$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

## Une méthode

Mathématiser le système étudié

Résoudre le problème mathématique

**Il est possible de mathématiser le système étudié**

## Une hypothèse récente

*La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire **l'Univers**, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères dans lequel il est écrit. Il **est écrit dans la langue mathématique** et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques (Galilée).*

## Une hypothèse controversée

*Si ces subtilités mathématiques sont vraies dans l'abstrait, elles ne correspondent pas à la matière physique et sensible quand on les y applique (Galilée [Simplicio])*

## Une hypothèse encore controversée

*Le but de l'esprit pragmatique est la réalité, et son chemin vers ce but est l'observation adéquate et pleine d'attention ; le but de l'esprit dogmatique est la formule, et son chemin celui de la construction mathématique (Stark)*

*La linguistique théorique [...] trop souvent déguise son complexe de « science humaine » et donc fondamentalement inexacte, sous des formules mathématiques (Yaguello)*



## Une hypothèse intrigante

*The eternal mystery of the world is its comprehensibility*  
(Einstein).

*The enormous usefulness of mathematics in the natural sciences  
is something bordering on the mysterious and that there is no  
rational explanation for it* (Wigner).

II. Une équation différentielle est-elle une hypothèse réfutable ?

En soi, l'équation

$$m\ddot{x} = -mg$$

(même avec les conditions aux limites  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ )

n'est pas une prédiction testable

Mais elle permet de faire des prédictions testables :

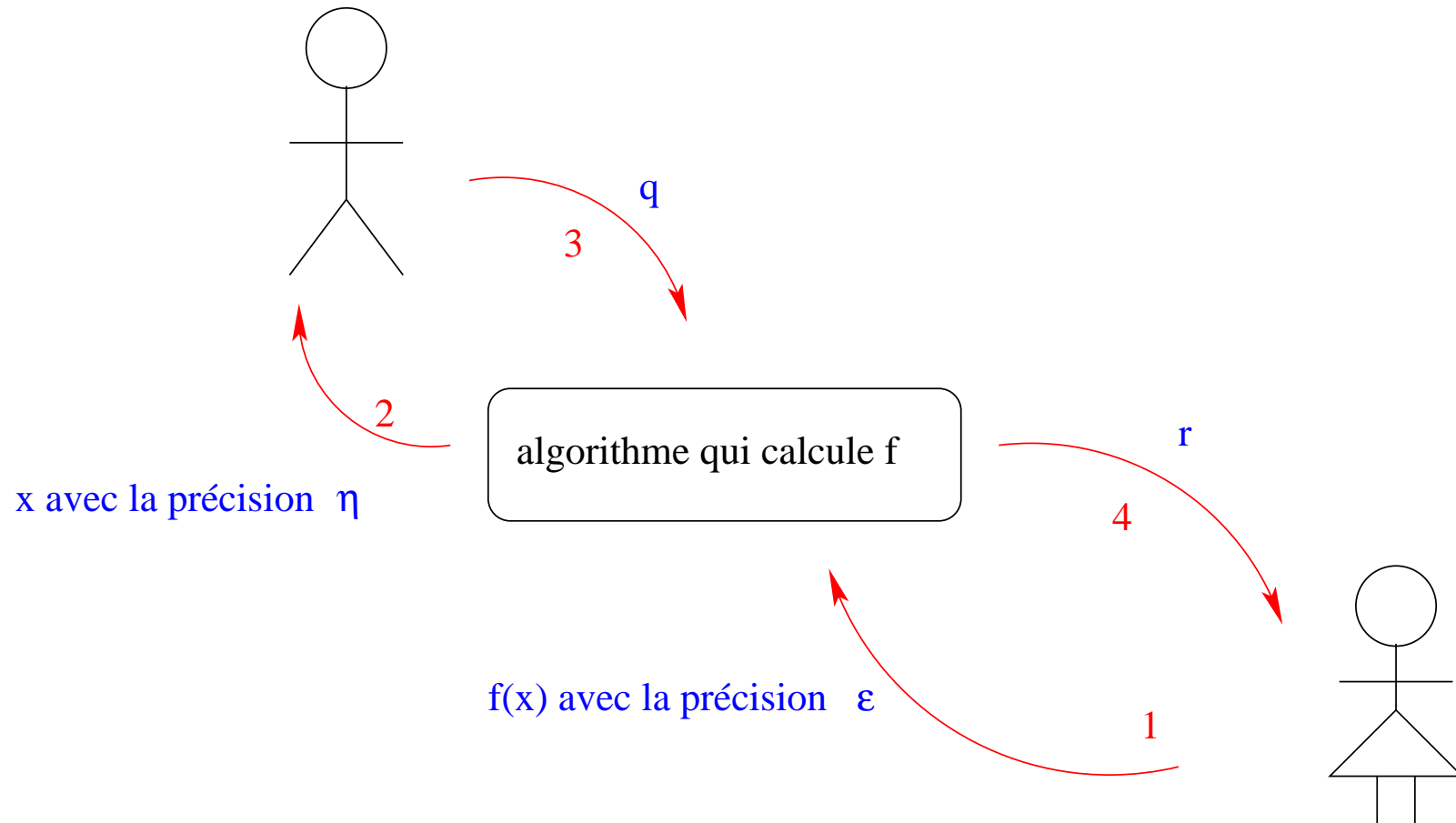
$$x(t) = -1/2gt^2, x(1s) = -4.9m$$

Ce qui rend l'équation différentielle réfutable

est que sa solution est un **algorithme** ( $-1/2gt^2$ ) qui permet de calculer  $x$  quand on connaît  $t$

Un algorithme qui opère sur des nombres réels

# Un algorithme qui opère sur des nombres réels



Les solutions des équations différentielles sont-elles toujours algorithmiques ?

$$m\ddot{x} = -mg : \text{oui } x(t) = -1/2gt^2$$

En général : non (Pour El et Richards, c. 1980)

Contre-exemple très artificiel : cond. aux limites algorithmiques, mais non dérivée

Donc plutôt **oui** (Costa, Graça, Campagnolo, ...)

## Avant Pour El et Richards

Euler (méthode de)

Éléments finis

Calcul approché **donc exact**

Équation diff. **+** algorithme de résolution des équations diff.

=

solution algorithmique de cette équation

analytique ?



Solution algorithmique

=

algorithme de prédiction du résultat des expériences

prédictions testables, donc réfutabilité

### III. Un mystère de plus en plus épais

## La thèse de Galilée

Une **expérience** : on prépare un système en choisissant des paramètres  $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$ , on mesure des valeurs  $\bar{b} = b_1, \dots, b_p$

La relation entre  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  peut être **exprimée par une proposition mathématique** (par exemple, par une équation différentielle)

Sans doute, une partie seulement de la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature

Et maintenant ... une nouvelle thèse

Il existe un **algorithme** qui permet de calculer  $\bar{b}$  connaissant  $\bar{a}$

Plus forte : tous les algorithmes exprimables par des propositions,  
mais toutes les propositions n'expriment pas des algorithmes

Le monde est encore plus compréhensible qu'Einstein le pensait,  
c'est encore plus incompréhensible

Mais cette thèse existe déjà

C'est la forme physique de la thèse de Church-Turing

Si on fabrique une **machine** alors cette machine ne calcule que des fonctions algorithmiques

Mais qu'est-ce qu'une machine ?

Une **machine** : on prépare un système en choisissant des paramètres  $\bar{a}$ , on mesure des valeurs  $\bar{b}$

La forme physique de la thèse de Church-Turing et la thèse de Galilée **parlent de la même chose**

La forme physique de la thèse de Church-Turing **implique** la thèse de Galilée

Explication de la raison pour laquelle la thèse de Galilée est vraie

Quoique ... explication d'un mystère par un autre plus épais

## Sauf que ...

La forme physique de la thèse de Church-Turing a **déjà** reçu une explication

Théorème de Gandy (1980)

Elle est conséquence de

- l'homogénéité de l'**espace** et du **temps**
- la finitude de la **vitesse de transmission** de l'information
- la finitude de la **densité** de l'information

Avec Arrighi : extension au cas quantique

Sur le plan philosophique :

explication de la thèse de Galilée ne suppose que des propriétés objectives de la nature

Sur un plan plus pratique :

le monde peut être modélisé non seulement avec des équations différentielles mais aussi avec des algorithmes



## IV. La modélisation algorithmique

## Mettre un problème en équation ?

R1 : Un avion sur la piste peut la quitter, en direction d'un garage

R2 : Un avion en vol peut atterrir sur la piste, si celle-ci est libre

(Deux avions n'atterrissent jamais exactement au même moment)

Combien peut-il y avoir d'avions simultanément sur la piste ?

## Mettre un problème en équation ?

R1 : Un avion sur la piste peut la quitter, en direction d'un garage

R2 : Un avion en vol peut atterrir sur la piste, si celle-ci est libre

(Deux avions n'atterrissent jamais exactement au même moment)

Combien peut-il y avoir d'avions simultanément sur la piste ?

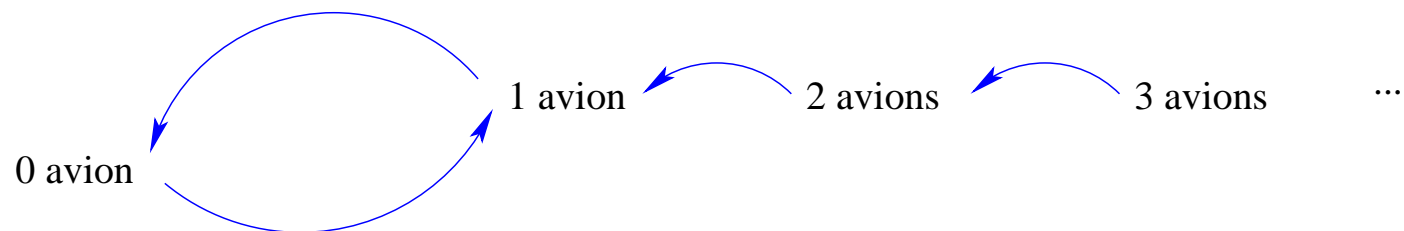
Comment mettre ce problème en équation ?

## Une autre manière de mathématiser

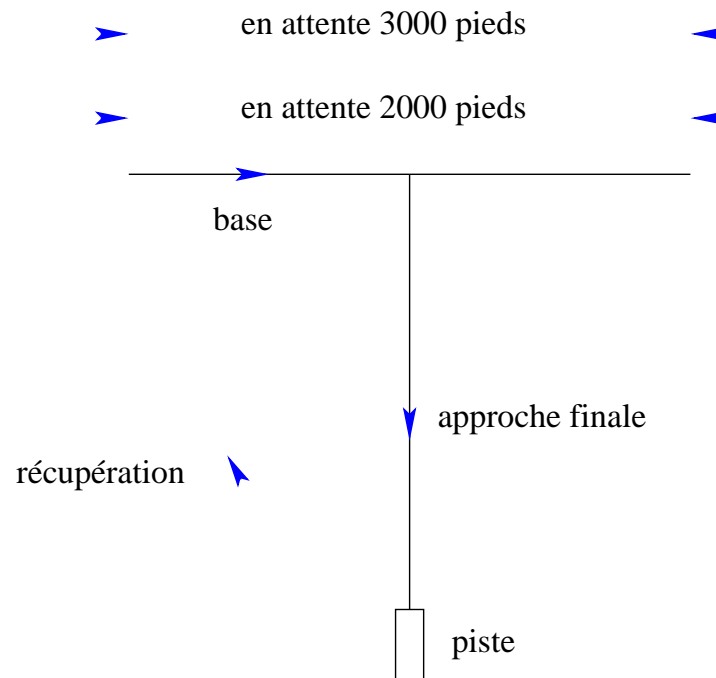
Semble difficile

Mais le problème se laisse mathématiser

Par un automate



## Un exemple un peu plus complexe (avec Muñoz et Carreño)



2000 états accessibles

Un aéroport n'est pas une masselotte au bout d'un ressort

L'une se modélise par une équation différentielle (dont la solution est algorithmique)

L'autre se modélise **directement** par un algorithme

## L'extension du domaine de la modélisation

La biologie, la linguistique, l'urbanisme, la climatologie, ...

## Le caractère précurseur de la chimie

$$+y \longrightarrow y$$

$$|x + y \longrightarrow x + |y$$

Rien à voir avec la  $\mapsto$  des fonctions

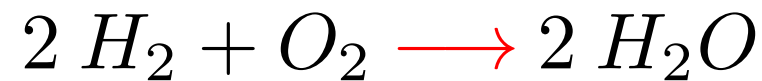


## Le caractère précurseur de la chimie

$$+y \longrightarrow y$$

$$|x + y \longrightarrow x + |y$$

Rien à voir avec la  $\mapsto$  des fonctions



*La science est ce que l'on comprend suffisamment pour  
l'expliquer à un ordinateur, l'art est tout ce que l'on fait d'autre.*